

# Поиск части оптимальной разметки некоторого NP-полного подкласса (max,+) задач

Ковтун И.В.

## 1. Введение

В сфере обработки изображений существенное место занимают задачи разметки, в данной статье объединенные названием (max,+) задачи. К (max,+) задачам сводятся такие прикладные задачи, как задача сегментации изображений по текстурным признакам, задача восстановления трехмерной конфигурации объекта по двум снимкам, задача реставрации зашумленного изображения и т.д.

Впервые (max,+) задача сформулирована в работе [1] в 1976 году. В работах [1] и [2] предлагается решение произвольной (max,+) задачи, сведением ее к задаче линейного программирования. При этом допускается ответ «не знаю». В работах [3] и [4] выделен подкласс задач, которые в данной статье называются полувыпуклыми, и показано, что для этого подкласса задач алгоритм, предложенный в работах [1,2] всегда находит решение (ответ «не знаю» никогда не возникает)

Поскольку, как в общем, так и во многих важных с прикладной точки зрения случаях, (max,+) задача является NP полной, то основные исследования направлены на поиск алгоритмов, решающих эту задачу приблизительно [5, 6, 7, 8].

Существенно новый взгляд на вещи оказали работы [9,10,11], в которых задача разметки сводится к задаче поиска минимального сечения.

Таким образом, вырисовался довольно широкий подкласс задач разметки, разрешимых за полиномиальное время. В то же время существуют практически значимые подклассы (max,+) задач, о которых известно, что они NP-полные. Для таких задач разрабатываются алгоритмы поиска приближенного решения. Однако, область применения (max,+) задач такова, что решение о метке в каждом отдельно взятом пикселе имеет свою ценность. В данной работе формулируются достаточные условия, для принятия решения о значении метки в том или ином пикселе. Предлагаемый алгоритм применим для одного из NP-полных классов (max,+) задач, а именно модели Поттса (Potts model). Результатом применения данного алгоритма является решение о значении оптимальной разметки в каждом пикселе. При этом, в некоторых пикселях допускается решение «Отказ от распознавания», что вполне естественно в связи с NP-полнотой рассматриваемого подкласса задач.

## 2. Основные определения.

В данном разделе вводятся основные определения. В дальнейшем нам понадобится оперировать такими понятиями, как *поле зрения, пиксель, разметка, множество меток, структура поля зрения, порядок структуры поля зрения, соседние пиксели*. Далее, после определения понятия *качества разметки*, (max,+) задача формулируется в общем виде, как задача нахождения разметки с оптимальным качеством.

*Поле зрения* будем называть произвольное конечное множество. В дальнейшем будем обозначать его символом  $T$ . Элементы поля зрения назовем *пикселями*. Одним из наиболее часто встречающихся примеров поля зрения является прямоугольный участок двумерной целочисленной решетки  $\{(i, j) | 0 \leq i < I, 0 \leq j < J\}$ .

*Разметкой* поля зрения  $T$  будем называть функцию  $k_T : T \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ . При этом множество  $\{1, 2, \dots, l\}$  назовем *множеством меток* и обозначим символом  $L$ . Сужение этой функции на подмножество  $\tau \subset T$  поля зрения будем обозначать  $k_\tau$ , а значение функции  $k_T$  в пикселе  $t \in T$  обозначим  $k_t$ .

Обозначим  $2^T = \{\tau | \tau \subseteq T\}$  - множество всех подмножеств множества  $T$ , включающее пустое множество и само множество  $T$ .

*Структурой поля зрения*  $T$  назовем семейство  $\mathfrak{Z} \subseteq 2^T$  подмножеств этого поля зрения. Отметим, что множество  $\mathfrak{Z}$  не обязано содержать в себе все подмножества поля зрения.

**Порядком структуры поля зрения** называется максимальное количество элементов в подмножестве структуры  $\max_{\tau \in \mathfrak{T}} |\tau|$ . Обычно, но совсем не обязательно, порядок структуры поля зрения равен двум.

**Соседними** в структуре  $\mathfrak{T}$  называются такие пиксели  $t$  и  $t'$ , для которых существует подмножество  $\tau \in \mathfrak{T}$  структуры, содержащее оба эти пикселя  $\{t, t'\} \subseteq \tau$ .

Обозначим  $L^\tau = \{k_\tau \mid k_\tau : \tau \rightarrow L\}$  - множество всех разметок части  $\tau$  поля зрения.

Пусть для каждого подмножества  $\tau \in \mathfrak{T}$  структуры задана функция  $g_\tau : L^\tau \rightarrow R$ , которая любой разметке  $k_\tau : \tau \rightarrow L$  ставит в соответствие действительное число  $g_\tau(k_\tau)$  – качество этого участка поля зрения.

**Качеством разметки**  $k_T : T \rightarrow L$  назовем число

$$Q(k_T) = \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} g_\tau(k_\tau). \quad (1)$$

**(max,+)** задача состоит в нахождении разметки  $k_T^*$ , имеющей максимальное качество:  $k_T^* = \arg \max_{k_T} Q(k_T) = \arg \max_{k_T} \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} g_\tau(k_\tau)$ .

### 3. Известный подкласс (max,+) задач, разрешимых за полиномиальное время

В дальнейшем нам пригодятся следующие знания о разрешимых (max,+) задачах.

Предположим, что множество меток  $L$  является **полностью упорядоченным множеством**. Тогда на множестве пар меток  $(l, l') \in L \times L$  естественным образом возникает отношение частичного порядка. А именно, для любых двух пар меток  $(r, r')$  и  $(l, l')$  определен их покоординатный максимум  $(r, r') \vee (l, l') = (r \vee l, r' \vee l')$  и минимум  $(r, r') \wedge (l, l') = (r \wedge l, r' \wedge l')$ . Введем таким же образом отношение частичного порядка и на множестве всех возможных разметок: для любых двух разметок  $k_T$  и  $k'_T$  естественным образом определим их покоординатный максимум, который обозначим  $k_T \cup k'_T$  и их покоординатный минимум, обозначаемый далее  $k_T \cap k'_T$ .

Будем говорить, что (max,+) задача является **полувыпуклой**, если для любых двух разметок  $k_T$  и  $k'_T$  выполняется следующее условие:

$$Q(k_T) + Q(k'_T) \leq Q(k_T \cup k'_T) + Q(k_T \cap k'_T). \quad (2)$$

Практическая проверка полувыпуклости функции качества основана на следующем утверждении, которое мы приведем без доказательства.

**Утверждение.** Для выполнения условия полувыпуклости необходимо и достаточно, чтобы неравенство (2) выполнялось для всех разметок  $k_T$  и  $k'_T$ , отличающихся не более, чем в двух соседних пикселях  $t$  и  $t'$ , причем метки  $k_t$  и  $k'_t$ , так же, как и метки  $k_{t'}$  и  $k'_{t'}$  являются соседними в соответствии с принятой на множестве  $L$  упорядоченностью.

Обо всех известных разрешимых подклассах (max,+) задач можно сказать следующее: в первую очередь все они являются подклассами полувыпуклых (max,+) задач, а именно, полувыпуклая (max,+) задача разрешима за полиномиальное время, если она относится к одному из следующих подклассов:

1) Порядок структуры поля зрения не превышает двух [1,2,3,4,8,9,10].

В этом случае функция качества имеет вид

$$Q(k_T) = \sum_{\{t\} \in \mathfrak{T}} q_t(k_t) + \sum_{\{t, t'\} \in \mathfrak{T}} g_{t, t'}(k_t, k_{t'}), \quad (3)$$

проверка условия полувывуклости в этом случае сводится к проверке «полувывуклости» каждой из функций  $g_{t,t'}$  независимым образом:

$$\begin{aligned} \forall \{t, t'\} \in \mathfrak{S}, \forall r, r', b, b' \in L: \\ g_{t,t'}(r, r') + g_{t,t'}(b, b') \leq g_{t,t'}((r, r') \vee (b, b')) + g_{t,t'}((r, r') \wedge (b, b')) \end{aligned} \quad (4)$$

- 2) Порядок структуры поля зрения равен трем, а количество меток равно двум [11].  
Функцию качества в этом случае можно записать в виде

$$Q(k_T) = \sum_{\{t, t', t''\} \in \mathfrak{S}} f_{t, t', t''}(k_t, k_{t'}, k_{t''}), \quad (5)$$

где каждая из функций  $f_{t, t', t''}$  в свою очередь является полувывуклой.

Очевидно, что если разметки  $k_T^*$  и  $k_T^{**}$  являются решением одной и той же полувывуклой  $(\max, +)$  задачи, то  $k_T^* \cup k_T^{**}$  и  $k_T^* \cap k_T^{**}$  тоже являются решением той же самой задачи. Действительно, подставив исходные разметки  $k_T^*$  и  $k_T^{**}$  в условие полувывуклости (2) и вспомнив, что качества разметок  $k_T^*$  и  $k_T^{**}$  не меньше качества любых других разметок, получим:

$$Q(k_T^*) = Q(k_T^{**}) = Q(k_T^* \cup k_T^{**}) = Q(k_T^* \cap k_T^{**})$$

Из вышесказанного следует, что можно говорить о «самой высокой» оптимальной разметке, как о максимальной среди всех оптимальных разметок  $\tilde{k}_T = \bigcup_{k_T^* = \arg \max_{k_T} Q(k_T)} k_T^*$  и о «самой низкой»

оптимальной разметке, как о минимальной среди всех оптимальных разметок:  $\hat{k}_T = \bigcap_{k_T^* = \arg \max_{k_T} Q(k_T)} k_T^*$ .

Следует также отметить, что известные алгоритмы решения полувывуклых  $(\max, +)$  задач позволяют найти как «самую низкую», так и «самую высокую» оптимальные разметки. При этом вычислительная сложность нахождения этих разметок такая же, как и при нахождении произвольной оптимальной разметки.

Для полувывуклых задач справедлива следующая лемма:

**Лемма.** Задана некоторая полувывуклая задача,  $\hat{k}_T = \bigcap_{k_T^* = \arg \max_{k_T} Q(k_T)} k_T^*$  - «самая низкая»

оптимальная разметка для этой задачи, а  $k_T$  - произвольная разметка, значение  $k_t$  которой в некотором пикселе  $t$  меньше метки  $\hat{k}_t$ , т.е. удовлетворяющая условию:

$$k_T \cap \hat{k}_T \neq \hat{k}_T. \quad (6)$$

В этом случае качество разметки  $k_T$  строго меньше качества максимума разметок  $k_T$  и  $\hat{k}_T$ :

$$Q(k_T) < Q(k_T \cup \hat{k}_T) \quad (7)$$

**Доказательство.** Перепишем неравенство (2) для разметок  $k_T$  и  $\hat{k}_T$

$$Q(k_T) + Q(\hat{k}_T) \leq Q(k_T \cap \hat{k}_T) + Q(k_T \cup \hat{k}_T) \quad (8)$$

Условие (6) вместе с тем, что  $\widehat{k}_T$  - «самая нижняя» оптимальная разметка, приводят к неравенству:

$$Q(k_T \cap \widehat{k}_T) < Q(\widehat{k}_T). \quad (9)$$

Сложив неравенства (8) и (9) получим утверждение леммы – неравенство (7). Доказательство леммы закончено.

#### 4. Формулировка основного результата

Пусть функция качества рассматриваемого подкласса задач имеет вид

$$Q(k_T) = \sum_{\{t\} \in \mathfrak{S}} q_t(k_t) + \sum_{\{t, t'\} \in \mathfrak{S}} g_{t, t'}(k_t, k_{t'}), \quad (10)$$

при этом функции  $q_t$  произвольные, а функции  $g_{t, t'}$  задаются формулой

$$g_{t, t'}(r, r') = \begin{cases} C_{t, t'} > 0 & r = r' \\ 0 & r \neq r' \end{cases}. \quad (11)$$

Эта задача не является полувывуклой, более того, в работе [8] показано, что она принадлежит классу NP-полных задач. Обычно доказательство NP-полноты того или иного класса задач оправдывает поиск алгоритмов, решающих задачи из этого класса задач приблизительно. Однако, возможен и другой подход к рассмотрению решению NP-полных (max,+) задач. Далее сформулированы достаточные условия для принятия решения о значении оптимальной разметки в том или ином пикселе. В некоторых пикселях допускается ответ «не знаю».

Для заданной (max,+) задачи построим вспомогательную полувывуклую (max,+) задачу. Точное решение этой вспомогательной задачи позволит сделать выводы о значении оптимальной разметки исходной задачи в некоторых пикселях.

**Вспомогательная задача** строится следующим образом:

1. Зафиксируем произвольную метку  $s \in L$ .
2. В каждом пикселе  $t \in T$  полностью упорядочим метки таким образом, чтобы самой верхней стала метка  $s$ , и независимо в каждом пикселе самой нижней меткой  $l_t^s$  стала бы та из оставшихся меток  $l_t^s \neq s$ , качество которой  $q_t(l_t^s)$  максимально:  $l_t^s = \arg \max_{\substack{l \in L \\ l \neq s}} q_t(l)$ .
3. Качества вершин и дужек во вспомогательной задаче строим следующим образом:

$$q_t^s(r) = q_t(r), \quad g_{t, t'}^s(r, r') = \begin{cases} C_{t, t'} & r = s, r' = s \\ C_{t, t'} & r \neq s, r' \neq s \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, функция качества вспомогательной задачи для метки  $s$  имеет вид

$$Q^s(k_T) = \sum_{t \in T} q_t^s(k_t) + \sum_{\{t, t'\} \in \mathfrak{S}} g_{t, t'}^s(k_t, k_{t'}) \quad (13)$$

Несложно проверить, что введенные формулой (12) функции  $g_{i,t}^s$  удовлетворяют условию полувыпуклости (4). Следовательно, построенная вспомогательная задача является полувыпуклой (max,+)-задачей и ее «самое нижнее» решение  $\widehat{k}_T^s$  может быть найдено за полиномиальное время.

**Теорема.** Произвольное решение исходной задачи  $k_T^* = \arg \max_{k_T} Q(k_T)$  удовлетворяет условию:  $k_T^* \cap \widehat{k}_T^s = \widehat{k}_T^s$ .

**Замечание.** Применение указанной теоремы позволяет уменьшить количество меток в каждом пикселе. Нужно рассматривать только те метки  $l \in L$  в пикселе  $t$ , которые лежат не ниже метки  $\widehat{k}_t^s$ :  $L_t = \{l \in L : l \cap \widehat{k}_t^s = \widehat{k}_t^s\}$ . Такое сокращение задачи приводит к уменьшению вычислительной сложности исходной задачи.

В частности, множество оставшихся меток  $L_t$  может состоять всего из одной метки  $\widehat{k}_t^s$ . В этом случае значение любой оптимальной разметки исходной задачи в пикселе  $t$  равно этой метке  $\widehat{k}_t^s$ .

**Алгоритм,** основанный на использовании теоремы заключается в выполнении для каждого  $s \in L$  следующих действий:

- строим вспомогательную задачу, исходя из выбранной метки  $s$ ;
- находим «самое нижнее» решение  $\widehat{k}_T^s$  вспомогательной задачи;
- из  $\widehat{k}_t^s = s$  следует  $k_t^* = s$ .

## 5. Доказательство

Доказательство теоремы будем проводить следующим образом: для любой разметки  $k_T$ , для которой  $k_T \cap \widehat{k}_T^s \neq \widehat{k}_T^s$  мы построим разметку, качество которой лучше, чем качество разметки  $k_T$ . А именно,  $Q(k_T \cup \widehat{k}_T^s) > Q(k_T)$ . Отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Рассмотрим произвольную разметку  $k_T$ , удовлетворяющую условию  $k_T \cap \widehat{k}_T^s \neq \widehat{k}_T^s$ . Из Леммы следует, что

$$0 < Q^s(k_T \cup \widehat{k}_T^s) - Q^s(k_T). \quad (14)$$

Если  $\widehat{k}_t^s \neq s$ , то положив  $\widehat{k}_t^s = l_t^s$  получим разметку с не меньшим качеством, являющуюся, однако, «самой низкой» в пикселе  $t$ . Поэтому значения «самой нижней» разметки вспомогательной задачи в каждом пикселе может принимать только две метки:  $\widehat{k}_t^s \in \{s, l_t^s\}$ .

Из формулы (12) и вышесказанного следует, что для любой пары пикселей  $t$  и  $t'$  выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} q_t^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s) - q_t^s(k_t) &= q_t(k_t \cup \widehat{k}_t^s) - q_t(k_t) \\ g_{t,t'}^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s, k_{t'} \cup \widehat{k}_{t'}^s) - g_{t,t'}^s(k_t, k_{t'}) &\leq g_{t,t'}^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s, k_{t'} \cup \widehat{k}_{t'}^s) - g_{t,t'}^s(k_t, k_{t'}) \end{aligned} \quad (15)$$

Далее продолжим неравенство (14) с учетом неравенств (15):

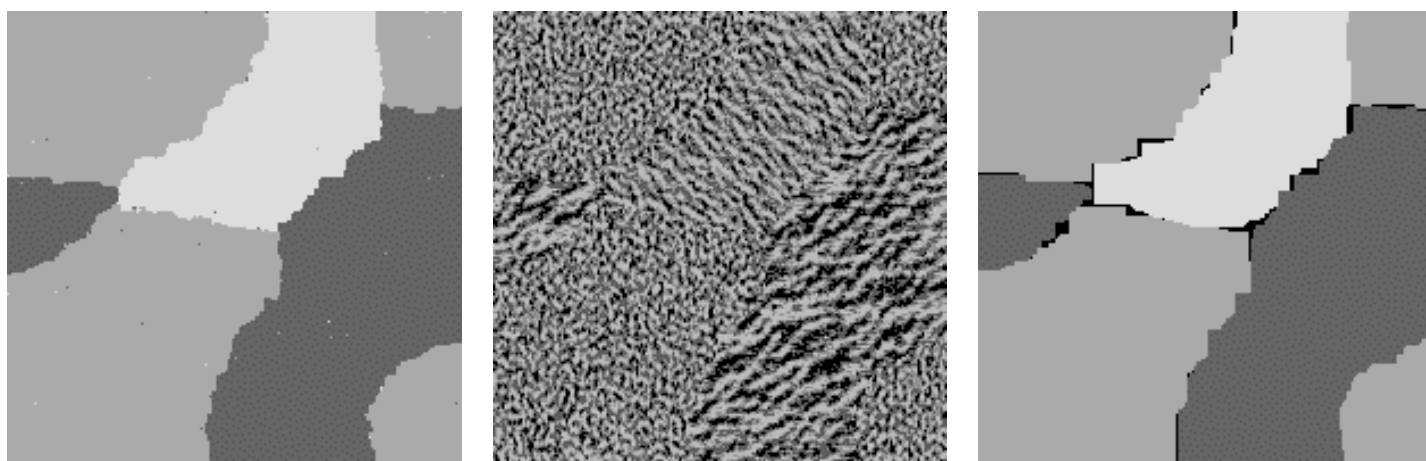
$$\begin{aligned} 0 < Q^s(k_T \cup \widehat{k}_T^s) - Q^s(k_T) &= \\ &= \sum_{t \in T} q_t^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s) + \sum_{t,t' \in \mathfrak{Z}} g_{t,t'}^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s, k_{t'} \cup \widehat{k}_{t'}^s) - \left( \sum_{t \in T} q_t^s(k_t) + \sum_{t,t' \in \mathfrak{Z}} g_{t,t'}^s(k_t, k_{t'}) \right) = \\ &= \sum_{t \in T} (q_t^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s) - q_t^s(k_t)) + \sum_{t,t' \in \mathfrak{Z}} (g_{t,t'}^s(k_t \cup \widehat{k}_t^s, k_{t'} \cup \widehat{k}_{t'}^s) - g_{t,t'}^s(k_t, k_{t'})) \leq \\ &\leq \sum_{t \in T} (q_t(k_t \cup \widehat{k}_t^s) - q_t(k_t)) + \sum_{t,t' \in \mathfrak{Z}} (g_{t,t'}(k_t \cup \widehat{k}_t^s, k_{t'} \cup \widehat{k}_{t'}^s) - g_{t,t'}(k_t, k_{t'})) = Q(k_T \cup \widehat{k}_T^s) - Q(k_T) \end{aligned} \quad (16)$$

С доказательством справедливости неравенства  $0 < Q(k_T \cup \widehat{k}_T^s) - Q(k_T)$  доказательство теоремы завершено.

## 6. Экспериментальная проверка алгоритма

Следующие три эксперимента демонстрируют применение теоремы в задаче сегментации и стерео. Во всех примерах предполагается в качестве поля зрения прямоугольный участок целочисленной решетки  $T = \{(i, j) \mid 0 \leq i < I, 0 \leq j < J\}$ . Структура соседства  $\mathfrak{S} = \{\{(i, j), (i+1, j)\} \subset T, \{(i, j), (i, j+1)\} \subset T\}$ . Функция качества имеет вид (10) с ограничениями (11). В работе [8] показано, что в случае, когда количество меток больше двух, данная задача является NP-полной.

1) Пример на рисунке 1 демонстрирует применимость алгоритма для текстурной сегментации. В данном примере при помощи Марковских случайных полей было искусственно сгенерировано изображение с тремя текстурами (рис. 1(b)). Благодаря этому действительная сегментация (рис. 1(a)) известна. Затем определенным каким-то образом для каждого пикселя были получены качества  $q_t(k)$ , указывающие степень принадлежности пикселя каждому из трех сегментов ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ). Далее находилось частичное решение задачи поиска оптимальной разметки. На рис. 1(c) представлен результат нахождения оптимальной разметки. При этом черным цветом обозначены те пиксели, оптимальная разметка в которых не найдена.



(a) Действительная сегментация

(b) Сгенерированное искусственное изображение

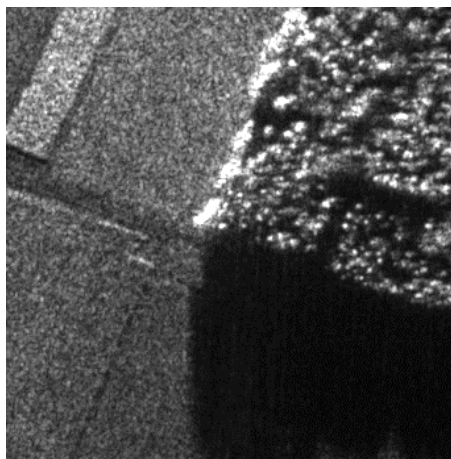
(c) Найденная часть оптимальной разметки. Найдено 98.8% решения исходной NP-полной задачи

Рис. 1. Сегментация искусственного изображения

2) Пример на рисунке 2 также демонстрирует применимость алгоритма в текстурной сегментации изображений. Для реального изображения (рис. 2(a)) определенным образом были подсчитаны качества  $q_t(k)$ , указывающие степень принадлежности пикселя каждому из трех сегментов ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ). Далее находилось частичное решение задачи поиска максимальной разметки. На рис. 2(b) представлен результат нахождения оптимальной разметки. При этом черным цветом обозначены те пиксели, оптимальная разметка в которых не найдена.

3) В примере на рисунке 3 рассматривается задача восстановления трехмерной конфигурации объекта по двум снимкам (рис. 3(a,b)). Определенным образом в каждом пикселе  $t$  вычислены качества  $q_t(k)$  для каждого из 21 возможного диспаратета ( $k \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ ) и сформулирована задача поиска наилучшей разметки. Найденная часть оптимальной разметки показана на рис. 3(c). При этом черным цветом обозначены те пиксели, оптимальная разметка в которых не найдена. Конечно же можно улучшить качество восстановления трехмерной конфигурации за счет более тщательного выбора чисел

$q_i(k)$ , однако целью данной работы является не качественное восстановление трехмерной конфигурации объекта, а исследование возможности нахождения точного решения тех задач, которые при таком восстановлении возникают.

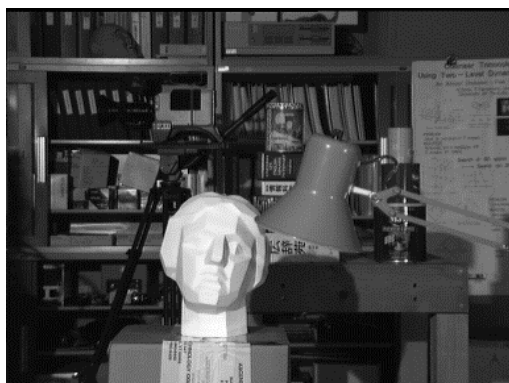


(a) Исходное изображение

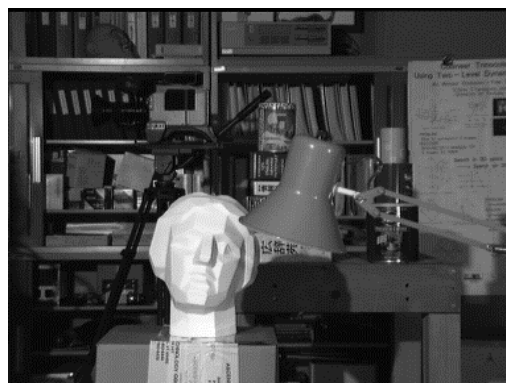


(b) Найденная часть оптимальной разметки. Найдено 98.4% решения исходной NP-полной задачи

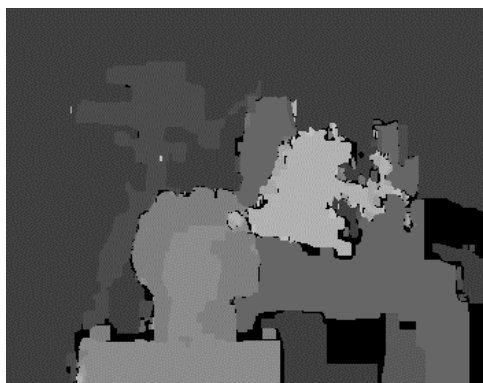
Рис. 2. Сегментация аэрофотоснимка



(a) Левый снимок



(b) Правый снимок



(c) Найденная часть оптимальной разметки. Найдено 93.6% решения исходной NP-полной задачи.

Рис. 3. Восстановление трехмерной сцены по паре стереоснимков.

## 7. Заключение

В работе сформулированы достаточные условия для принятия решения о метке в том или ином пикселе и алгоритм нахождения частичного решения (max,+) задачи, базирующийся на них. Экспериментальные результаты, приведенные в статье показывают, что перед тем, как применять алгоритмы поиска приближительного решения (max,+) задачи, которые зачастую итерационные и качество результата зависит от количества итераций, можно предварительно частично восстановить оптимальную разметку используя описанный выше алгоритм. В ряде случаев результат нахождения части оптимальной разметки можно считать самодостаточным, так как восстанавливается более 98% оптимальной разметки, а оставшимися пикселями, в которых алгоритм выдал ответ «не знаю», можно пренебречь.

## 8. Список литературы

1. Шлезингер М.И., “Синтаксический анализ двумерных зрительных сигналов в условиях помех”, Кибернетика, К., 1976, № 4, с. 113-130.
2. Шлезингер М.И., Коваль В.К., “Двумерное программирование в задачах анализа изображений”, Автоматика и телемеханика, М., 1976 г. № 2, с. 149-168.
3. Schlesinger M.I., Flach B., “Some solvable subclasses of structural recognition problems”, Czech Pattern Recognition Workshop 2000, Tomas Svoboda (ed.), Czech Pattern Recognition Society, Praha, February 2000, pp. 55-61.
4. Schlesinger M.I., Flach B., “Analysis of optimal labelling problems and their application to image segmentation and binocular stereovision”, Proceedings East-West-Vision 2002 (EWV'02), Franz Leberl, Andrej Ferko (eds.), International Workshop & Project Festival on Computer Vision, Computer Graphics, New Media. pp. 55-60.
5. Kirkpatrick S., Gellatt C.D., Vecch Jr., and M.P., “Optimization by simulated annealing”, Science, 1983, vol. 220, no. 4598, pp. 671-680.
6. Geman S., Geman D., “Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images”, IEEE Trans. on PAMI, 1984, vol. 6, no. 6, pp. 721-741.
7. Stan Z. Li, “Markov Random Field Modeling in Image Analysis”, Computer Science Workbench, Springer, 2001. 323 p.
8. Boykov Y., Veksler O., Zabih R., “Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts”, IEEE Trans. on PAMI, 2001, vol. 23, no. 11, pp. 1222-1239.
9. Greig D.M., Porteous B.T., Seheult A.H., “Exact Maximum A Posteriori Estimation for Binary Images”, J. Royal Statistical Soc., Series B, vol. 51, no. 2, pp. 271-279, 1989.
10. Ishikawa H., Geiger D., “Segmentation by grouping junctions”, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1998.
11. Kolmogorov V., Zabih R., “What energy functions can be minimized via graph cuts”, ECCV 2002, vol. 2352, pp. 65-81.