

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕТКИ И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Шлезингер М.И., Антонюк К.В., Водолазский Е.В.

Введение

Оптимизационные задачи разметки, которым посвящена статья, являются той областью, в которой прикладные задачи визуального анализа приходят в прямое соприкосновение с фундаментальными проблемами современных компьютерных наук. С одной стороны, к отысканию оптимальных разметок сводятся сегментация изображений [], стереозрение [] и многие другие практические задачи визуального анализа [], распознавание речевых сигналов [], анализ текстовой информации []. С другой стороны, оптимизационные задачи разметки являются естественным обобщением задачи совместимости ограничений, которая является одним из основных объектов исследований в современных компьютерных науках [].

Содержание данной статьи состоит в следующем. Прежде всего в качестве примера рассмотрен один класс задач обработки изображений. Эти задачи являются самыми простыми задачами, которые составляют первоначальное звено в различных технологических цепочках обработки изображений. Мы покажем, что точная их формулировка, адекватно отражающая их прикладное содержание, даже в этом простейшем случае приводит к NP -полному классу задач, и поэтому требует к себе самого пристального внимания. Эти задачи называются задачами разметки и в англоязычной литературе известны под названием CSP (constraint satisfaction problem).

Затем мы определим понятие размытой разметки и задачу ее оптимизации. Множество этих задач уже не образует NP -полный класс и поэтому он не безнадежен для точного решения. Однако эти надежды до сих пор не оправдались. Это значит, что в настоящее время не известен практически пригодный алгоритм, решающий все задачи этого класса. Мы опишем два подхода к их решению, каждый из которых обладает достоинствами и недостатками.

Наконец, мы укажем будущие исследования, которые, возможно, приведут к новым алгоритмам, которые не будут обладать недостатками известных алгоритмов.

1. Простейший класс обработки изображений

Пусть $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ - прямоугольный участок двумерной целочисленной решетки, называемый полем зрения, а $\bar{k} : T \rightarrow \{0, 1\}$ - идеальное изображение.

Идеальное изображение недоступно для непосредственного наблюдения. Наблюдаемым является лишь результат $\bar{x}: T \rightarrow R$ его случайного искажения, называемый реальным изображением. Пусть известно, как зависит реальное изображение \bar{x} от идеального изображения \bar{k} . Это значит, что заданы условные вероятности $p(\bar{x}/\bar{k})$, причем так, что

$$p(\bar{x}/\bar{k}) = \prod_{t \in T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x(t)-k(t))^2}. \quad (1)$$

Пусть при этих исходных данных требуется построить стратегию $q: X^T \rightarrow K^T$, которая для каждого реального изображения \bar{x} указывает наиболее правдоподобное идеальное изображение

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} \prod_{t \in T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x(t)-k(t))^2}. \quad (2)$$

Прикладное содержание этой задачи состоит в разумном восстановлении идеального изображения по результату его искажения. В данном простейшем случае это всего лишь квантование изображения на два уровня, известное как бинаризация изображения.

Задача (2) имеет очевидное решение

$$\begin{aligned} \bar{k}^* &= 1, \text{ если } x(t) \geq 0,5, \\ &= 0, \text{ если } x(t) < 0,5. \end{aligned} \quad (3)$$

Однако, каждый, кто хоть раз применял это решение, немедленно замечал, что оно не соответствует тому, что хотелось бы получить. Слишком много белых точек появляется в тех пикселях, где для человека-наблюдателя очевидно, что эти пиксели должны быть черными, и наоборот. Поэтому после получения решения (3) применяют те или другие дополнительные обработки, которые его улучшают с точки зрения каких-то разумных соображений, известных пользователю, но не учитывавшихся при формулировке задачи (2). Это – интуитивные и не сформулированные однозначно соображения о том, что для двух соседних пикселей t и t' равенство $k(t) = k(t')$ в идеальном изображении значительно более вероятно, чем неравенство $k(t) \neq k(t')$. Если это интуитивное соображение выразить точно, то можно модифицировать задачу (2) так, чтобы ее решение уже не нуждалось в каком-то дополнительном улучшении. Например, можно принять, что на множестве K^T всех

возможных идеальных изображений задано распределение априорных вероятностей $p: K^T \rightarrow R$, так что априорная вероятность $p(\bar{k})$ разметки \bar{k} есть число

$$p(\bar{k}) = \prod_{t' \in \mathfrak{S}} g'(k(t), k(t')), \quad (4)$$

где \mathfrak{S} - множество всех возможных пар соседних пикселей, а $g'(k, k') = c_{=}$, если $k = k'$, $g'(k, k') = c_{\neq}$, если $k \neq k'$, причем $c_{=} > c_{\neq}$. Затем задача (2), сформулированная без учета разумных соображений (4), заменяется задачей отыскания наиболее вероятной разметки

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} p(\bar{k}) \cdot p(\bar{x}/\bar{k}) = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} \prod_{t' \in \mathfrak{S}} g'(k(t), k(t')) \cdot \prod_{t \in T} q'(k(t), x(t)), \quad (5)$$

где через $q'(k(t), x(t))$ для краткости обозначен t -й сомножитель в выражении (1). Задача (5) может быть представлена в эквивалентном виде

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} \left[\sum_{t' \in \mathfrak{S}} g(k(t), k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)) \right], \quad (6)$$

где $g(k, k') = 1$ при $k = k'$ и $g(k, k') = 0$ при $k \neq k'$, а $q_t(k) = a \log q'_t(k) + b$ при некоторых значениях a и b . Точное решение задачи (6) длительное время было неизвестно. Для теории и практики структурного распознавания существенный прорыв произошел в конце 90-х годов [Ишикава], когда было доказано, что в рассматриваемом случае, когда идеальное изображение принимает только два значения, задача (6) сводится к поиску максимального потока в сети, а следовательно, является полиномиально разрешимой при любых числах $q_t(k)$, присутствующих в ее формулировке. Если же идеальное изображение имеет вид $\bar{k}: T \rightarrow K$, $|K| > 2$, а не только $\bar{k}: T \rightarrow \{0, 1\}$, то множество задач вида (6) образует NP -полный класс, и, скорее всего, не решается алгоритмом полиномиальной сложности. Мы видим, таким образом, что задачи обработки изображений являются трудными не только в том смысле, что существует целый ряд очень важных приложений, решение которых еще не достигнуто несмотря на большие уже затраченные усилия. Они трудны в точном вычислительном смысле этого слова. Эта трудность обнаруживается не только при реализации крупных проектов общепризнанной значимости, но и в задачах, кажущаяся простота которых в высшей степени обманчива. Рассмотренный пример и является одной из таких задач.

Решение задач визуального анализа требует привлечения самых современных средств вычислительной оптимизации, в частности, решения тех задач, которым посвящена данная работа.

2. Определение основных понятий и формулировка задач

Пусть T и K - два конечных множества, называемые соответственно множеством объектов и множеством меток. Пусть $\bar{k} : T \rightarrow K$ функция, называемая разметкой, $k(t)$ - значение этой функции для объекта $t \in T$, K^T - множество всех возможных разметок. Функцию вида $\bar{k} : T \rightarrow K$ мы будем называть еще строгой разметкой, чтобы отличать ее от размытой разметки, которая будет определена далее.

Пусть для каждого объекта $t \in T$ определено подмножество $N(t) \subset T$, элементы которого называются соседями объекта t . Подмножества $N(t)$ таковы, что $t \notin N(t)$ и $t' \in N(t) \Leftrightarrow t \in N(t')$. Обозначим \mathfrak{S} множество $\{\{t, t'\} \mid t \in T, t' \in N(t)\}$. Обозначение $\{t, t'\} \in \mathfrak{S}$, таким образом, есть краткая запись того, что $(t \in N(t')) \& (t' \in N(t))$. В дальнейшем, вместо обозначения $\{t, t'\} \in \mathfrak{S}$ будем применять более краткое обозначение $tt' \in \mathfrak{S}$.

Упорядоченную пару (k, t) , $k \in K$, $t \in T$, назовем вершиной, а неупорядоченную пару $((k, t), (k', t'))$, такую, что $tt' \in \mathfrak{S}$, назовем дужкой. Будем считать, что вершина (k^*, t^*) входит в разметку $\bar{k} : T \rightarrow K$, если $k(t^*) = k^*$. Будем считать, что дужка $((k, t), (k', t'))$ входит в разметку $\bar{k} : T \rightarrow K$, если в нее входит и вершина (k, t) , и вершина (k', t') .

Пусть для каждой вершины (k, t) задано число $q(t, k)$, называемое ее качеством, равно, как и для каждой дужки $((k, t), (k', t'))$ задано ее качество $g((k, t), (k', t'))$. Качеством $G(\bar{k})$ разметки $\bar{k} : T \rightarrow K$, $\bar{k} \in K^T$, называется сумма качеств входящих в нее дужек и вершин,

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \mathfrak{S}} g((t, k(t)), (t', k(t'))) + \sum_{t \in T} q(t, k). \quad (7)$$

Задача оптимальной разметки состоит в отыскании разметки

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} G(\bar{k}) \quad (8)$$

с максимальным качеством. Множество задач указанного формата образует NP -полный класс. В дальнейшем совокупность качеств $q(t, k)$, $t \in T$, $k \in K$, для краткости обозначается q ,

совокупность $g((t,k),(t',k'))$, $tt' \in \mathfrak{T}$, $k \in K$, $k' \in K$, – как g , а пара (q, g) называется функцией качества.

Существенно более простыми, чем задачи формата (7), (8), являются задачи, которые мы назовем оптимизацией размытой разметки. Эти задачи основаны на следующих понятиях. Пусть для каждой вершины (t,k) , $t \in T$, $k \in K$, определено число $\alpha(t,k)$, называемое ее весом, а для каждой дужки $((t,k),(t',k'))$, $tt' \in \mathfrak{T}$, $k \in K$, $k' \in K$, – ее вес $\beta((t,k),(t',k'))$. Массив чисел $(\alpha(t,k) | t \in T, k \in K)$ обозначим α , а массив чисел $(\beta((t,k),(t',k')) | tt' \in \mathfrak{T}, k \in K, k' \in K)$ обозначим β . Пару (α, β) будем называть весовой функцией. Весовую функцию (α, β) назовем размытой разметкой, если она удовлетворяет условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t,k) = \sum_{k' \in K} \beta((t,k),(t',k')), t \in T, k \in K, t' \in N(t); \\ \sum_{k \in K} \alpha(t,k) = 1, t \in T; \\ \alpha(t,k) \geq 0, t \in T, k \in K; \\ \beta((t,k),(t',k')) \geq 0, tt' \in \mathfrak{T}, k \in K, k' \in K. \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} \alpha(t,k) = 1, t \in T; \quad (10)$$

$$\alpha(t,k) \geq 0, t \in T, k \in K; \quad (11)$$

$$\beta((t,k),(t',k')) \geq 0, tt' \in \mathfrak{T}, k \in K, k' \in K. \quad (12)$$

Множество решений системы уравнений (9)-(12) назовем множеством размытых разметок и обозначим A . Для каждой размытой разметки $(\alpha, \beta) \in A$ определим ее качество

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{tt' \in \mathfrak{T}} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t,k),(t',k')) \cdot g((t,k),(t',k')) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t,k) \cdot q(t,k), \quad (13)$$

или в более краткой записи

$$G(\alpha, \beta) = \langle \alpha, q \rangle + \langle \beta, g \rangle, \quad (14)$$

где $\langle \square, \square \rangle$ обозначает скалярное произведение функций, имеющих одну и ту же область определения. Задача оптимальной разметки состоит в отыскании размытой разметки (α^*, β^*) с наилучшим качеством,

$$G(\alpha^*, \beta^*) = \max_{(\alpha, \beta) \in A} G(\alpha, \beta). \quad (15)$$

Множество задач указанного формата образует определенный подкласс задач линейного программирования и поэтому является полиномиально разрешимым. Однако в настоящее время неизвестен прагматически хороший алгоритм общего решения задач вида (9)-(15).

Отыскание наилучшей размытой разметки во многих случаях может оказаться вполне приемлемой заменой отысканию наилучшей строгой разметки, потому что:

а) определенный подкласс задач оптимальной строгой разметки сводится к оптимизации размытой разметки; таковы задачи на ациклической структуре и супермодулярные задачи на произвольной структуре [Гиг]; в данной статье мы добавим в этот список еще и перестановочно супермодулярные задачи [], которые включают в себя все супермодулярные задачи и все субмодулярные задачи на двудольных структурах;

б) качество оптимальной разметки является оценкой сверху для качества оптимальной строгой разметки и поэтому может служить средством для проверки, насколько хорошей является строгая разметка, полученная тем или иным эвристическим алгоритмом;

в) отыскание оптимальной размытой разметки является одним из этапов при настройке алгоритмов отыскания строгой разметки [];

г) наконец, несмотря на то, что задачи оптимальной размытой разметки образуют полиномиально разрешимый класс, в настоящее время неизвестны практически пригодные алгоритмы их решения, и это само по себе является вполне приличным стимулом для поиска таких алгоритмов.

3. Эквивалентные и тривиальные задачи разметки

Исходные данные в задачах оптимальной строгой и размытой разметки совпадают. Этими данными является пятерка $z = \langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$, где T и K - два конечных множества, \mathfrak{S} - подмножество пар вида $\{t, t'\}$, $t \in T$, $t' \in T$, $t \neq t'$, q - массив чисел $q(t, k)$, $t \in T$, $k \in K$, g - массив чисел $g((t, k), (t', k'))$, $tt' \in \mathfrak{S}$, $k \in K$, $k' \in K$. Исходные данные $z = \langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$ мы будем иногда называть просто задачей, не уточняя при этом, о какой именно задаче идет речь, о строгой или размытой.

Для строгой разметки справедливо следующее чересчур сильное и поэтому тривиальное достаточное условие оптимальности. Если для разметки $\bar{k}^* : T \rightarrow K$ для всех $t \in T$ и для всех $tt' \in \mathfrak{S}$ выполняются условия

$$q(t, k^*(t)) = \max_{k \in K} q(t, k),$$

$$g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) = \max_{k \in K, k' \in K} g\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right),$$

то для любой разметки $\bar{k} \in K^T$ выполняется неравенство $G(\bar{k}^*) \geq G(\bar{k})$. Строгую задачу назовем тривиальной, если по крайней мере одна оптимальная разметка удовлетворяет тривиальным условиям оптимальности.

Подобным образом определяется подкласс тривиальных размытых задач разметки. Если для размытой разметки $(\alpha^*, \beta^*) \in A$ для всех вершин (k, t) и всех дужек $((k, t), (k', t'))$ выполняются условия

$$q(t, k) < \max_{l \in K} q(t, l) \Rightarrow \alpha^*(t, k) = 0,$$

$$g\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right) < \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g\left(\left(t, l\right), \left(t', l'\right)\right) \Rightarrow \beta^*\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right) = 0,$$

то для любой разметки $(\alpha, \beta) \in A$ выполняется неравенство $G(\alpha^*, \beta^*) \geq G(\alpha, \beta)$.

Размытую задачу разметки назовем тривиальной, если хотя бы одно ее решение удовлетворяет этим условиям.

Пусть две строгие задачи разметки определяются исходными данными $z^1 = \langle T, K, \mathfrak{S}, g^1, q^1 \rangle$ и $z^2 = \langle T, K, \mathfrak{S}, g^2, q^2 \rangle$ соответственно. Эти две задачи назовем эквивалентными, если равенство

$$\sum_{t' \in \mathfrak{S}} g^1\left(\left(t, k(t)\right), \left(t', k(t')\right)\right) + \sum_{t \in T} q^1(t, k(t)) = \sum_{t' \in \mathfrak{S}} g^2\left(\left(t, k(t)\right), \left(t', k(t')\right)\right) + \sum_{t \in T} q^2(t, k(t))$$

выполняется для каждой разметки $\bar{k} \in K^T$. В работе [Гиг] доказана теорема

Теорема 1. Две строгие задачи разметки $z^1 = \langle T, K, \mathfrak{S}, g^1, q^1 \rangle$ и $z^2 = \langle T, K, \mathfrak{S}, g^2, q^2 \rangle$ эквивалентны тогда и только тогда, если существуют числа $\varphi_{t'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, удовлетворяющие равенства

$$g^2\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right) = g^1\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k'),$$

$$q^2(t, k) = q^1(t, k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k).$$

Величины $\varphi_{t'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, которые присутствуют в формулировке теоремы, назовем потенциалами.

Теорема 1 легко модифицируется и для случая размытых разметок.

Теорема 2. Две задачи разметки $\langle T, K, \mathfrak{Z}, g^1, q^1 \rangle$ и $\langle T, K, \mathfrak{Z}, g^2, q^2 \rangle$ обеспечивают равенство

$$\langle \alpha, q^1 \rangle + \langle \beta, g^1 \rangle = \langle \alpha, q^2 \rangle + \langle \beta, g^2 \rangle \quad (16)$$

для каждой размытой разметки $(\alpha, \beta) \in A$ тогда и только тогда, когда существуют такие потенциалы $\varphi_{tt'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, что

$$g^2((t, k), (t', k')) = g^1((t, k), (t', k')) + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k'), \quad (17)$$

$$g^2((t, k), (t', k')) = g^1((t, k), (t', k')) + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k'), \quad (18)$$

Доказательство. Докажем, что если выполняется условие (16), то выполняются и условия (17) и (18). Поскольку равенство (16) справедливо для всех размытых разметок, то оно выполняется и для таких размытых разметок, в которых веса $\alpha(t, k)$ всех вершин, равно как и веса $\beta((t, k), (t', k'))$ всех дужек, принимают значения 0 и 1, то есть для всех строгих разметок. В силу теоремы 1 в этом случае выполняются и условия (17), (18).

Докажем, что из условий (17) и (18) следуют равенства (16). Выберем произвольную размытую разметку $(\alpha, \beta) \in A$ и зафиксируем ее для дальнейшего рассмотрения. Поскольку вес $\beta((t, k), (t', k'))$ определен для дужки, то есть неупорядоченной пары $((t, k), (t', k'))$, то

$$\beta((t, k), (t', k')) = \beta((t', k'), (t, k)). \quad (19)$$

Для любых чисел $\varphi_{tt'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, справедливо равенство

$$\sum_{tt' \in \mathfrak{Z}} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot [\varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k')] = \sum_{t \in T} \sum_{t' \in N(t)} \sum_k \sum_{k'} \beta((t, k), (t', k')) \cdot \varphi_{tt'}(k). \quad (20)$$

Действительно, пусть t_1 и t_2 - два соседних объекта, $t_1 t_2 \in \mathfrak{Z}$, то есть $t_2 \in N(t_1)$, $t_1 \in N(t_2)$.

Этой паре объектов соответствует сумма

$$\sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot [\varphi_{t_1 t_2}(k) + \varphi_{t_2 t_1}(k')] \quad (21)$$

в левой части (20) и сумма

$$\sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot \varphi_{t_1 t_2}(k) + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_2, k), (t_1, k')) \cdot \varphi_{t_2 t_1}(k) \quad (22)$$

в правой части (20). Справедлива цепочка

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot \varphi_{t_1 t_2}(k) + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_2, k), (t_1, k')) \cdot \varphi_{t_2 t_1}(k) = \\
& = \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot \varphi_{t_1 t_2}(k) + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k'), (t_2, k)) \cdot \varphi_{t_2 t_1}(k) = \\
& = \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot \varphi_{t_1 t_2}(k) + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot \varphi_{t_2 t_1}(k') = \\
& = \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t_1, k), (t_2, k')) \cdot [\varphi_{t_1 t_2}(k) + \varphi_{t_2 t_1}(k')].
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано равенство чисел (21) и (22), а следовательно, и равенство (20). В силу того, что для размытой разметки (α, β) равенство

$$\alpha(t, k) = \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k'))$$

выполняется для всех $t \in T$, $k \in K$, $t' \in N(t)$, равенство (20) приобретает вид

$$\sum_{t' \in \mathfrak{N}} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot [\varphi_{t' t}(k) + \varphi_{t t'}(k')] = \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k). \quad (23)$$

В силу условий (17) и (18) разность качеств $\langle \alpha, q^1 \rangle + \langle \beta, g^1 \rangle$ и $\langle \alpha, q^2 \rangle + \langle \beta, g^2 \rangle$ разметки (α, β) в двух рассматриваемых задачах равна

$$\sum_{t' \in \mathfrak{N}} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta_{t'}(k, k') \cdot [\varphi_{t' t}(k) + \varphi_{t t'}(k')] - \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k),$$

которая в силу (23) равна нулю. **Теорема доказана.**

Для функции качества (q, g) определим ее характеристику

$$P(q, g) = \sum_{t' \in \mathfrak{N}} \max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} q(t, k),$$

называемую ее мощностью. Пусть функция качества (q, g) преобразуется в эквивалентную ей функцию (q', g') с помощью потенциалов $\varphi_{t'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, так что

$$\begin{aligned}
g'((t,k),(t',k')) &= g((t,k),(t',k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k'), \\
t \in T, t' \in N(t), k \in K, k' \in K; \\
q'(t,k) &= q(t,k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k), \\
t \in T, k \in K.
\end{aligned}$$

В таком случае мощность преобразованной функции качества выражается в явном виде через потенциалы, а именно,

$$\begin{aligned}
P(q', g') &= \sum_{t' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K, k' \in K} \left[g((t,k),(t',k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k') \right] + \\
&+ \sum_{t \in T} \max_{k \in K} \left[q(t,k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k) \right].
\end{aligned}$$

Как видно, мощность задачи является выпуклой функцией потенциалов. Справедливы следующие три теоремы, доказанные в [Гиг.].

Теорема 3. Если для функции качества (q, g) существует тривиальный эквивалент, то функция качества (q^*, g^*) , обеспечивающая минимальную мощность в классе функций, эквивалентных (q, g) , также тривиальна.

Теорема 4. Пусть структура \mathfrak{S} на множестве T не образует циклов. В таком случае для любой задачи $\langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$ существует ее тривиальный эквивалент $\langle T, K, \mathfrak{S}, q^*, g^* \rangle$.

Пусть множество K меток упорядочено, а качества $g((t,k),(t',k'))$ для любой пары $tt' \in \mathfrak{S}$ соседних объектов и любой четверки меток $k_1 \geq k_2, k'_1 \geq k'_2$ удовлетворяют неравенству

$$g((t,k_1),(t',k'_2)) + g((t,k_2),(t',k'_1)) \leq g((t,k_1),(t',k'_1)) + g((t,k_2),(t',k'_2)).$$

Задачи с такими качествами дужек называются супермодулярными.

Теорема 5. Для любой супермодулярной задачи существует тривиальный эквивалент.

Эта теорема обобщается и на более широкий класс задач, названных перестановочно супермодулярными, которые определяются следующим образом [Д.Ш.] Пусть I - произвольное упорядоченное множество, а $i_t : K \rightarrow I, t \in T$, функция, которая для каждого объекта $t \in T$ определяет нумерацию меток, причем нумерация меток в одном объекте совсем не обязательно совпадает с нумерацией в другом. Задача $\langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$ называется

перестановочно супермодулярной, если существуют такие нумерации $i_t : K \rightarrow I$, $t \in T$, что неравенство

$$g((t, k_1), (t', k_2')) + g((t, k_2), (t', k_1')) \geq g((t, k_1), (t', k_1')) + g((t, k_2), (t', k_2'))$$

выполняется для любой пары $tt' \in \mathfrak{S}$ соседних вершин и любой четверки меток k_1, k_2, k_1', k_2' , такой что $i_t(k_1) \geq i_t(k_2)$, $i_{t'}(k_1') \geq i_{t'}(k_2')$.

Теорема 6. Для любой перестановочно супермодулярной функции существует тривиальный эквивалент.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится, потому что далее мы покажем другие, более тонкие свойства перестановочно супермодулярных функций.

Очевидна следующая теорема.

Теорема 7. Мощность тривиальной задачи равна качеству оптимальной строгой разметки.

Доказательство. Пусть $\bar{k}^* : T \rightarrow K$ и есть та разметка, существование которой определяет тривиальность задачи $\langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$. Для разметки \bar{k}^* и любой другой разметки $\bar{k} : T \rightarrow K$ справедливо, что

$$\begin{aligned} G(\bar{k}^*) &= \sum_{tt' \in \mathfrak{S}} g((t, k^*(t)), (t', k^*(t'))) + \sum_{t \in T} q(t, k^*(t)) =, \\ &= \sum_{tt' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} q(t, k) \geq, \\ &\geq \sum_{tt' \in \mathfrak{S}} g((t, k(t)), (t', k(t'))) + \sum_{t \in T} q(t, k(t)) = G(\bar{k}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Если задача $\langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$ обладает минимальной мощностью в своем классе эквивалентности, то ее мощность равна качеству оптимальной размытой разметки.

Доказательство. 1. Пусть P^* - мощность функции потерь (g, q) , о которой говорит теорема,

$$P^* = \sum_{tt' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} q(t, k), \quad (24)$$

а $P(\Phi)$ - мощность функции потерь, эквивалентной (g, q) и полученной с помощью потенциалов $\Phi = (\varphi_{tt'}(k) \mid t \in T, t' \in N(t), k \in K)$,

$$P(\Phi) = \sum_{tt' \in \mathfrak{Z}} \max_{k \in K, k' \in K} \left[g((t, k), (t', k')) + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k') \right] + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} \left[q(t, k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) \right]. \quad (25)$$

По условию теоремы неравенство

$$P(\Phi) \geq P^* \quad (26)$$

выполняется для любого набора Φ потенциалов.

2. Пусть (α, β) - произвольно выбранная разметка, а

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{tt' \in \mathfrak{Z}} \sum_{k \in K, k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot q(t, k) \quad (27)$$

- ее качество. Поскольку веса $\alpha(t, k)$ и $\beta((t, k), (t', k'))$ - неотрицательные числа, а

$\sum_{k \in K} \alpha(t, k) = 1$ для всех $t \in T$, $\sum_{k \in K, k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) = 1$, для всех $tt' \in \mathfrak{Z}$, то каждое

слагаемое в правой части (24) не меньше, чем соответствующее слагаемое в (27),

$$\max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k')) \geq \sum_{k \in K, k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot g((t, k), (t', k')),$$

$$\max_{k \in K, k' \in K} q(t, k) \geq \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot q(t, k).$$

Следовательно, неравенство

$$P \geq G(\alpha, \beta) \quad (28)$$

выполняется для любой размытой разметки (α, β) .

3. Введем в рассмотрение совокупность чисел $a(t, k)$, $k \in K$, $t \in T$, $b((t, k), (t', k'))$, не обязательно образующих разметку, но удовлетворяющих условиям

$$a(t, k) \geq 0, \sum_{k \in K} a(t, k) = 1, t \in T, k \in K, \quad (29)$$

$$b((t, k), (t', k')) \geq 0, \sum_{k \in K, k' \in K} b((t, k), (t', k')) = 1, tt' \in \mathfrak{Z}, k \in K, k' \in K, \quad (30)$$

$$g((t,k),(t',k')) < \max_{l \in K, l' \in K} g((t,l),(t',l')) \Rightarrow b((t,k),(t',k')) = 0, \quad (31)$$

$$q(t,k) < \max_{l \in K} q(t,l) \Rightarrow a(t,k) = 0. \quad (32)$$

Определим функцию

$$L(\Phi) = \sum_{t' \in \bar{3}} \sum_{k \in K, k' \in K} b((t,k),(t',k')) \cdot [g((t,k),(t',k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k')] + \\ + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t,k) \cdot \left[q(t,k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k) \right],$$

линейно зависящую от потенциалов $\varphi_{t'}(k)$. В силу условий (29)-(32) эта функция не превышает мощность $P(\Phi)$. Неравенство

$$L(\Phi) \leq P(\Phi) \quad (33)$$

справедливо при любых потенциалах, а при нулевых потенциалах обращается в равенство

$$L(0) = P(0). \quad (34)$$

4. В силу (33), (34) градиент линейной функции $L(\Phi)$ есть по определению субградиент выпуклой функции $P(\Phi)$ в точке $\Phi = 0$. Градиент линейной функции $L(\Phi)$ есть совокупность чисел

$$\Delta \varphi_{t'}(k) = a(t,k) - \sum_{t' \in N(t)} b((t,k),(t',k')), \quad t \in T, \quad t' \in N(t), \quad k \in K. \quad (35)$$

Эта же совокупность чисел $a(t,k)$ и $b((t,k),(t',k'))$, удовлетворяющих (29)-(32) является субградиентом выпуклой функции $P(\Phi)$. Справедливо и более сильное утверждение, что любой субградиент функции $P(\Phi)$ в точке $\Phi = 0$ имеет вид (35) для чисел $a(t,k)$ и $b((t,k),(t',k'))$, удовлетворяющих условиям (29)-(32).

5. По условию теоремы нулевые потенциалы обеспечивают минимальное значение выпуклой функции $P(\Phi)$ и поэтому в точке $\Phi = 0$ существует нулевой субградиент, то есть

числа $a^0(t, k)$ и $b^0((t, k), (t', k'))$, удовлетворяющие (29)-(32) и еще дополнительные условия

$$\Delta\varphi_{tt'}(k) = a^0(t, k) - \sum_{t' \in N(t)} b^0((t, k), (t', k')) = 0, \quad t \in T, \quad t' \in N(t), \quad k \in K.$$

Это значит, что они образуют размытую разметку.

6. В силу условий (29)-(32) для этой разметки равенство

$$\sum_{k \in K} a^0(t, k) \cdot q(t, k) = \max_{k \in K} q(t, k). \quad (36)$$

выполняется для всех $t \in T$, а равенство

$$\sum_{k \in K, k' \in K} b^0((t, k), (t', k')) \cdot g((t, k), (t', k')) = \max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k')) \quad (37)$$

– для всех $tt' \in \mathfrak{T}$. Следовательно, справедлива цепочка

$$\begin{aligned} G(a^0, b^0) &= \sum_{tt' \in \mathfrak{T}} \sum_{k \in K, k' \in K} b^0((t, k), (t', k')) \cdot g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} a^0(t, k) \cdot q(t, k) = \\ &= \sum_{tt' \in \mathfrak{T}} \max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} q(t, k) = P^* \geq G(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Первое равенство в цепочке справедливо по определению качества размытой разметки, второе – в силу только что доказанных равенств (36) и (37), третье – по определению мощности задачи. Неравенство в последнем звене цепочки справедливо для любой размытой разметки в силу доказанного ранее (28). Таким образом, качество размытой разметки (a^0, b^0) не хуже любой другой разметки и равно мощности P^* . **Теорема доказана.**

Мы видим таким образом, что эквивалентное преобразование задачи с целью минимизации ее мощности указывает общую идею решения определенных классов задач, которые до сих пор представлялись различными. При этом следует, конечно же, признать, что решение ациклических задач с помощью минимизации их мощности значительно менее эффективно, чем решение их методом динамического программирования [10 лекций]. Подобным образом супермодулярные задачи более целесообразно сводить к отысканию максимального потока [Ишикава], а не к минимизации энергии. Однако, динамическое программирование в принципе неприменимо для задач разметки на произвольных структурах, а минимизация потока неприменима к произвольным ациклическим задачам. Минимизация

мощности применима ко всем ациклическим задачам и ко всем супермодулярным. Более того, далее мы покажем, что минимизация мощности является средством решения всех перестановочно супермодулярных задач [ДШЛ], к которым не применимы ни динамическое программирование, ни максимизация потока. Наконец, минимизация мощности является универсальным способом отыскания качества наилучшей размытой разметки в любой задаче.

При всех привлекательных сторонах идеи минимизации мощности существенный ее недостаток состоит в том, что сейчас неизвестны практически хорошие алгоритмы ее реализации, а лишь отдельные попытки решить эту задачу. Рассмотрим две такие попытки с указанием как их достоинств, так и других, менее привлекательных их сторон.

4. Алгоритмы диффузии и их формальные свойства

Пусть пятерка $\langle T, K, \mathfrak{S}, q, g \rangle$ -- это исходные данные задачи, о которой не будем уточнять, является ли она строгой или размытой. Эти исходные данные можно эквивалентным образом преобразовать так, что веса $q(t, k)$ всех вершин станут равны нулю. Поэтому в дальнейшем в этом разделе мы будем говорить, что исходные данные задачи заданы в виде четверки $\langle T, K, \mathfrak{S}, g \rangle$, считая при этом, что веса всех вершин равны нулю. Все последующие эквивалентные преобразования задачи будут производиться так, что для всех вершин сохраняются нулевые значения их качеств. Это значит, что эквивалентное преобразование исходной задачи $\langle T, K, \mathfrak{S}, g \rangle$ в задачу с минимальной мощностью состоит в отыскании значений потенциалов, минимизирующих функцию вида

$$P(\Phi) = \sum_{t' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K, k' \in K} \left[g((t, k), (t', k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k') \right], \quad (38)$$

при условии, что равенство

$$\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k) = 0 \quad (39)$$

соблюдается для всех вершин $t \in T, k \in K$.

Алгоритм диффузии представляет собой последовательный просмотр объектов $t \in T$ в произвольном порядке, для каждого текущего объекта $t^* \in T$ -- просмотр всех вершин (t^*, k) , $k \in K$, в произвольном порядке и для каждой текущей вершины (t^*, k^*) -- минимизацию мощности $P(\varphi)$ только по совокупности потенциалов $\varphi_{t'}(k^*)$, $t' \in N(t^*)$, относящихся к

этой вершине. Более точно, алгоритм диффузии, или просто диффузия, – это эквивалентное преобразование функции качества g в функцию g' по следующим правилам:

Для всех $t \in T$ и всех $k \in K$ выполнить

{

для всех $t' \in N(t)$ выполнить

$$c(t') = \max_{k' \in K} g((t, k), (t', k'));$$

$$c = \frac{1}{|N(t)|} \sum_{t' \in N(t)} c(t');$$

для всех $t' \in N(t)$ и всех $k' \in K$ выполнить

$$g(t, k, t', k') := g(t, k, t', k') + (c - c(t')).$$

}

Преобразование функции качества g с помощью этого алгоритма обозначим T , так что $g' = T(g)$ обозначает, что в результате преобразования функции g получена функция g' . Приведенный алгоритм является предельно упрощенным частным случаем алгоритмов [Wain],[Kol]. В работе [Костя] выполнен анализ этого частного случая, результат которого по-видимому можно обобщить и на более общие случаи [Wain],[Kol] [Shekovcov]. Для формулировки этого результата определим дополнительно следующие понятия.

Обозначим D множество всех возможных дужек,

$$D = \{((t, k), (t', k')) \mid tt' \in \mathfrak{Z}, k \in K, k' \in K\}.$$

Подмножество $D' \subset D$ дужек назовем согласованным, если для любой тройки t, t', t'' объектов, таких что $t' \in N(t), t'' \in N(t)$, и любой дужки $((t, k), (t', k')) \in D'$ существует дужка $((t, k), (t'', k'')) \in D'$. Функцию качества g назовем ε -согласованной, если множество

$$\left\{ ((t, k), (t', k')) \mid g((t, k), (t', k')) \geq \max_{l \in K, l' \in K} g((t, l), (t', l')) - \varepsilon \right\}$$

содержит в себе непустое согласованное подмножество. Каждой функции качества g поставим в соответствие ее характеристику $\varepsilon(g)$ как минимальное число ε , при котором эта функция ε -согласована. Величину $\varepsilon(g)$ назовем ее несогласованностью, и если $\varepsilon(g) = 0$, то функцию g назовем согласованной. Несогласованность функции есть конструктивно вычисляемая характеристика функции качества g .

Основное свойство диффузии выражает следующая теорема.

Теорема 9. Пусть g^0 -- функция качества, а $g^i, i = 1, 2, \dots$, -- последовательность функций, такая что $g^i = T(g^{i-1}), i = 1, 2, \dots$. В таком случае $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon(g_i) = 0$.

Эта теорема утверждает, что диффузия есть универсальное средство для эквивалентного преобразования любой функции качества g в ε -согласованную при любом положительном ε . Покажем в следующем разделе, как это связано с возможностью решения определенного класса задач разметки.

5. Перестановочно супермодулярные задачи разметки

Пусть $\langle T, K, \mathfrak{Z}, g \rangle$ -- исходные данные задачи, то ли размытой, то ли строгой, I -- произвольное упорядоченное множество, а $i_t : K \rightarrow I$ -- нумерация меток, определенная для каждого объекта $t \in T$ и своя для каждого объекта. Функцию качества g назовем перестановочно супермодулярной, если существуют такие нумерации $i_t : K \rightarrow I, t \in T$, что для каждой пары $tt' \in \mathfrak{Z}$ соседних объектов и для каждой четверки k_1, k_2, k'_1, k'_2 меток, таких что $i_t(k_1) \geq i_t(k_2), i_{t'}(k'_1) \geq i_{t'}(k'_2)$, выполняется неравенство

$$g((t, k_1), (t', k'_2)) + g((t, k_2), (t', k'_1)) \leq g((t, k_1), (t', k'_1)) + g((t, k_2), (t', k'_2)).$$

Класс перестановочно супермодулярных функций, конечно же, намного шире класса супермодулярных. В частности, если соседство \mathfrak{Z} образует на множестве T двудольный граф, то любая субмодулярная функция перестановочно супермодулярна.

Если бы для перестановочно супермодулярной функции качества была бы известна совокупность нумераций $i_t : K \rightarrow I, t \in T$, обращающая ее в супермодулярную, то строгая задача разметки сводилась бы к супермодулярной, которая в свою очередь сводится к отысканию максимального потока в сети [кто-нибудь]. Задача усложняется, если нумерации $i_t : K \rightarrow I, t \in T$, не известны, а гарантируется лишь их существование. Задача еще более усложняется, если для решения предложена задача, которая не обязательно перестановочно супермодулярна. В этом случае следовало бы прежде всего распознать, является ли она такой, а затем либо приступить к ее решению, либо отказаться от ее решения, как не входящей в область применимости алгоритма. Такой путь реализуемый, когда качества всех дужек не равны $(-\infty)$. Известно [Дима ШЛ], что в этом случае распознавание перестановочной супермодулярности

имеет полиномиальную сложность. Однако, если среди дужек есть и дужки с качеством $g((t, k_1), (t', k_2)) = -\infty$, то этот путь не реализуемый.

Мы покажем, что алгоритм диффузии может приближенно (со сколь угодно малой, но ненулевой погрешностью), а иногда и точно решать любые перестановочно супермодулярные задачи и еще много других. Это утверждение справедливо не только для диффузии, но и для всех алгоритмов, гарантирующих эквивалентное преобразование функции качества в ε -согласованную функцию при любом $\varepsilon > 0$.

Для перестановочно супермодулярной функции качества g справедливы следующие формальные свойства.

Теорема 10. Если g -- перестановочно супермодулярная функция качества, то любая эквивалентная ей функция качества g' также перестановочно супермодулярна.

Доказательство. В силу эквивалентности функций g и g' существуют такие потенциалы $\varphi_{t'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$, что

$$g'((t, k), (t', k')) = g((t, k), (t', k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k'), \quad tt' \in \mathfrak{T}, \quad k \in K, \quad k' \in K. \quad (40)$$

В силу перестановочной супермодулярности функции g существует такая нумерация $i_t : K \rightarrow I$, $t \in T$, что неравенство

$$g((t, k_1), (t', k_2')) + g((t, k_2), (t', k_1')) \leq g((t, k_1), (t', k_1')) + g((t, k_2), (t', k_2')) \quad (41)$$

выполняется для всех $tt' \in \mathfrak{T}$ и каждой четверки k_1, k_2, k_1', k_2' , такой что $i_t(k_1) \geq i_t(k_2)$, $i_{t'}(k_1') \geq i_{t'}(k_2')$. В силу (40) это же неравенство выполняется и для функции g' .

Действительно,

$$\begin{aligned} & g'((t, k_1), (t', k_2')) + g'((t, k_2), (t', k_1')) = \\ & = (g((t, k_1), (t', k_2')) + \varphi_{t'}(k_1) + \varphi_{t'}(k_2')) + (g((t, k_2), (t', k_1')) + \varphi_{t'}(k_2) + \varphi_{t'}(k_1')) \leq \\ & \leq (g((t, k_1), (t', k_1')) + \varphi_{t'}(k_1) + \varphi_{t'}(k_1')) + (g((t, k_2), (t', k_2')) + \varphi_{t'}(k_2) + \varphi_{t'}(k_2')) = \\ & = g'((t, k_1), (t', k_1')) + g'((t, k_2), (t', k_2')). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В силу этой теоремы каждую перестановочно супермодулярную задачу при любом $\varepsilon > 0$ можно преобразовать в ее ε -согласованный перестановочно супермодулярный эквивалент, например, с помощью диффузии. Представление исходной перестановочно супермодулярной

функции в виде ε -согласованного эквивалента приводит к приближенному, а иногда и к точному решению строгой задачи разметки.

Теорема 11. Пусть $\langle T, K, \mathfrak{S}, g \rangle$ -- исходные данные задачи разметки, в которой g -- перестановочно супермодулярная ε -согласованная функция с мощностью P . В таком случае существует строгая разметка $\bar{k}^* : T \rightarrow K$ с качеством

$$G(\bar{k}^*) \geq P - |\mathfrak{S}| \cdot 2\varepsilon. \quad (42)$$

Доказательство. Для каждой пары $tt' \in \mathfrak{S}$ определим число

$$c(t, t') = \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((t, k), (t', k')). \quad (43)$$

Определим подмножество дужек

$$D_\varepsilon = \{((t, k), (t', k')) \mid g((t, k), (t', k')) \geq c(t, t') - \varepsilon\}. \quad (44)$$

и его согласованное подмножество $D_\varepsilon^* \subseteq D_\varepsilon$. Для каждого $t \in T$ и некоторого $t' \in N(t)$ определим подмножество

$$K(t) = \{k \in K \mid \exists k' ((t, k), (t', k')) \in D_\varepsilon^*\}. \quad (45)$$

В силу согласованности подмножества D_ε^* определение (45) не зависит от того, какое $t' \in N(t)$ использовано в правой части (45), и в силу той же согласованности все эти подмножества не пустые.

Разметка $\bar{k}^* : T \rightarrow K$, существование которой требуется доказать, есть разметка

$$k^*(t) = \arg \max_{k \in K(t)} i_t(k).$$

Докажем, что для этой разметки выполняется неравенство (42). Множество $K(t)$ содержит в себе метку k , для которой

$$c(t, t') \geq g((t, k), (t', k^*(t'))) \geq c(t, t') - \varepsilon, i_t(k) \leq i_t(k^*(t)),$$

а множество $K(t')$ содержит в себе метку k' , для которой

$$c(t, t') \geq g((t, k^*(t)), (t', k')) \geq c(t, t') - \varepsilon, i_{t'}(k') \leq i_{t'}(k^*(t')).$$

Кроме того,

$$g((t, k), (t', k^*(t'))) \leq c(t, t')$$

Для четверки меток $k, k^*(t), k', k^*(t')$ выполняется неравенство

$$g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) + g\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right) \geq g\left(\left(t, k\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) + g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k'\right)\right),$$

а следовательно, и более слабое неравенство

$$g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) + c(t, t') \geq c(t, t') - \varepsilon + c(t, t') - \varepsilon$$

и неравенство

$$g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) \geq c(t, t') - 2\varepsilon$$

Это значит, что качество $G\left(\bar{k}^*\right)$ разметки \bar{k}^* равно

$$G\left(\bar{k}^*\right) = \sum_{t' \in \mathfrak{I}} g\left(\left(t, k^*(t)\right), \left(t', k^*(t')\right)\right) \geq \sum_{t' \in \mathfrak{I}} c(t, t') - 2\varepsilon |\mathfrak{I}| = P - 2\varepsilon |\mathfrak{I}|.$$

Теорема доказана.

Теорема доказывает существование разметки, качество которой мало отличается, а иногда и вообще не отличается от мощности задачи. Однако, она не указывает, как именно найти эту разметку, так как нумерации $i_t : K \rightarrow I, t \in T$, неизвестны. Для отыскания самой разметки требуются следующие рассуждения.

В случае, когда перестановочно супермодулярная функция качества g принимает целочисленные значения, качество наилучшей разметки можно определить точно, а не приближенно. Для этого нужно исходную функцию качества преобразовать в ε -согласованную функцию g' при $\varepsilon < \frac{1}{2|\mathfrak{I}|}$. В этом случае качество наилучшей строгой разметки равно

наибольшему целому числу, не превосходящему число $\sum_{t' \in \mathfrak{I}} \max_{k \in K, k' \in K} g'\left(\left(t, k\right), \left(t', k'\right)\right)$.

Мы опишем алгоритм, который находит наилучшую строгую разметку для всех перестановочно супермодулярных задач с целочисленной функцией качества, минуя при этом распознавание, является ли задача, предложенная для решения, перестановочно супермодулярной или нет. Если на его вход подать перестановочно супермодулярную задачу, то алгоритм выдает разметку, которая гарантированно оптимальна. Если же на его вход подать какую-либо другую задачу, то алгоритм либо выдает гарантированно оптимальную разметку, либо сообщает о своем отказе решать предложенную задачу с указанием, что она не перестановочно супермодулярна. Таким образом, алгоритм решает все перестановочно супермодулярные задачи и еще много других, избегая при этом распознавание перестановочной супермодулярности каждой решаемой задачи.

Алгоритм основан на эквивалентном преобразовании функции качества в \mathcal{E} -согласованную, например, с помощью диффузии. Кроме того, алгоритм выполняет дополнительное, неэквивалентное преобразование функции качества, которое назовем фиксированием вершины (k, t) или (k, t) -фиксированием. Пусть g - функция качества, а (k^*, t^*) - некоторая вершина. Фиксирование вершины (k^*, t^*) состоит в преобразовании функции g в g' так, что $g'((t^*, k), (t', k')) = -\infty$ для всех $k \neq k^*, t' \in N(t^*), k \in K'$, а для всех остальных дужек $g'((t, k), (t', k')) = g((t, k), (t', k'))$. Фиксирование вершины (k^*, t^*) обозначает исключение из рассмотрения всех разметок, которые в объекте t^* принимают значение, отличающееся от k^* , и сохранение качеств всех разметок, которые в объекте t^* принимают значение k^* . Если функция g перестановочно супермодулярная, то при фиксировании любой вершины она остается перестановочно супермодулярной.

Пусть $\langle T, K, \mathfrak{I}, g \rangle$ - исходные данные произвольной задачи разметки, не обязательно перестановочно супермодулярной. Предполагается лишь, что функция g в этих исходных данных принимает целочисленные значения. Алгоритм решения широкого круга задач, включающего все перестановочно супермодулярные задачи, состоит в следующем.

1. Выбрать число $\varepsilon < \frac{1}{2|\mathfrak{I}|}$;

для каждого $t \in T$ определить множество $K(t) = K$;

выполнить эквивалентное преобразование функции g в \mathcal{E} -согласованную;

найти максимальное число c , не превосходящее $\sum_{t' \in \mathfrak{I}} \max_{k \in K, k' \in K} g((t, k), (t', k'))$.

Комментарий. В дальнейшем алгоритм либо найдет разметку с качеством c , и это будет оптимальная разметка, либо сообщит, что задача, предложенная для решения, не является перестановочно супермодулярной.

2. Найти объект $t^* \in T$, для которого $|K(t^*)| > 1$;

если такого объекта нет, то перейти на п.5.

3. Для каждой метки $k^* \in K(t^*)$

{

выполнить над функцией g фиксирование вершины (k^*, t^*) , результат которого запомнить как g' ;

преобразовать функцию g' в эквивалентную ей ε -согласованную функцию g'' ;

если $\sum_{t' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K, k' \in K} g''((t, k), (t', k')) > c$, то выполнить

{

$$K(t^*) = \{k^*\};$$

$$g = g'';$$

перейти на п.2;

}

}

Комментарий. Если решаемая задача перестановочно супермодулярная, то указанное условие выполнится по крайней мере для одного k^* . Это же условие может выполниться и для некоторых задач, которые не являются перестановочно супермодулярными.

4. Прекратить решение задачи.

Комментарий. Останов алгоритма в этом месте возможен только тогда, когда решаемая задача не является перестановочно супермодулярной.

5. Закончить работу алгоритма.

Комментарий. Останов алгоритма в этом месте обозначает успешное завершение. Разметка $\bar{k}^* : T \rightarrow K$ со значениями $k^*(t) \in K(t)$, $t \in T$, имеет качество c и нет никакой другой разметки с лучшим качеством.

Мы видим, таким образом, что диффузия, наравне с другими алгоритмами эквивалентного преобразования функции потерь в ε -согласованную, обладает достоинствами, которые от нее и не ожидалось. Она позволяет решать широкий класс задач, который содержит все перестановочно супермодулярные задачи строгой, а не размытой разметки. В то же время эти алгоритмы не оправдывают надежд, которые на них возлагались. Они не обеспечивают эквивалентное преобразование функции качества в функцию с минимальной мощностью, так как согласованность функции качества является необходимым, но не достаточным условием этого минимума. Это значит, что для некоторых задач, которые эквивалентны тривиальным, этот тривиальный эквивалент не будет найден. Этим существенным недостатком не обладают алгоритмы, основанные на идеях субградиентной оптимизации, хотя они обладают другими недостатками.

6. Субградиентная минимизация мощности задачи

Пусть $\langle T, K, \mathfrak{S}, g, q \rangle$ -исходные данные для поиска наилучшей размытой разметки. Теорема 8 утверждает, что вычисление качества этой разметки сводится к отысканию значения потенциалов $\varphi_{t'}$ (k), $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$ которые минимизируют мощность

$$P(\Phi) = \sum_{t' \in \mathfrak{S}} \max_{k \in K, k' \in K} \left[g((t, k), (t', k')) + \varphi_{t'}(k) + \varphi_{t'}(k') \right] + \sum_{t \in T} \max_{k \in K} \left[q(t, k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k) \right]. \quad (46)$$

Поскольку мощность $P(\Phi)$ есть выпуклая функция потенциалов, ее минимум можно найти с помощью субградиентного спуска, который применительно к решаемой задаче состоит в следующем.

Инициализация алгоритма

1. выбрать последовательность чисел $\gamma_i, i = 1, 2, \dots$, так, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0, \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$;
2. каждой дужке присвоить начальное значение качества $g^0((t, k), (t', k'))$, равное качеству $g((t, k), (t', k'))$, указанному в исходных данных задачи;
3. каждой вершине присвоить начальное значение качества $q^0(t, k)$, равное качеству $q(t, k)$ указанному в исходных данных задачи;
4. установить $i = 0$.

Множественная итерация алгоритма

1. Установить нулевые начальные значения всех потенциалов $\varphi_{t'}(k) = 0, t \in T, t' \in N(t), k \in K$;
2. Для каждого объекта $t \in T$ и каждого объекта $t' \in N(t)$ выбрать любую метку $k \in K$, такую что $q^i(t, k) = \max_{l \in K} q^i(t, l)$, и установить значение $\varphi_{t'}(k) = 1$.
3. Для каждой пары $tt' \in \mathfrak{S}$ объектов выбрать любую пару меток k и k' , такую что $g^i((t, k), (t', k')) = \max_{l \in K, l' \in K} g^i((t, l), (t', l'))$, и выполнить $\varphi_{t'}(k) := \varphi_{t'}(k) - 1$;
 $\varphi_{t'}(k') := \varphi_{t'}(k') - 1$

4. Для всех вершин $(t, k), t \in T, k \in K$, вычислить их новые качества

$$q^{i+1}(t, k) := q^i(t, k) - \gamma_i \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{t'}(k);$$

5. Для всех дужек $((t, k), (t', k')), tt' \in \mathfrak{S}, k \in K, k' \in K$, вычислить их новые качества

$$g^{i+1}((t, k), (t', k')) := g^i((t, k), (t', k')) + \gamma_i (\varphi_{t'}(k) + \varphi_{t''}(k'));$$

6. Выполнить $i := i + 1$ и перейти на 1.

Для этого алгоритма справедливо утверждение, которое следует из общей теории субградиентного спуска [ШОР]. Пусть (q^*, g^*) - функция качества, эквивалентная исходной функции (q, g) и минимизирующая мощность. Пусть P^* -- значение этого минимума, а P^i -- значение мощности текущей функции (q^i, g^i) , полученной алгоритмом. В таком случае $\lim_{i \rightarrow \infty} P^i = P^*$. Это – важное положительное свойство субградиентного спуска по сравнению с алгоритмами, которые гарантируют лишь получение эквивалентной функции качества со сколь угодно малой несогласованностью. Если для решаемой задачи тривиальный эквивалент вообще существует, то субградиентный спуск гарантирует ее эквивалентное преобразование к задаче, сколь угодно мало отличающейся от тривиальной. В то же время представленный вариант субградиентного спуска обладает очевидными недостатками, которые свидетельствуют не о недостатках субградиентного спуска, а скорее о наших недостаточных знаниях этого метода.

Прежде всего, в приведенном алгоритме не указано условие его останова. Из того факта, что $\lim_{i \rightarrow \infty} P^i = P^*$, конечно же, следует, что для любого положительного $\varepsilon > 0$ алгоритм за конечное количество шагов обеспечит выполнение неравенства $P^i - P^* < \varepsilon$. Однако сейчас неизвестно, каким образом следует распознать тот факт, что это неравенство уже выполнилось, когда значение P^* неизвестно.

Затем, рекомендации по выбору последовательности γ_i , вытекающие из общей теории, чересчур общи. Конечно же, субградиентный спуск обеспечивает сходимость к минимуму при любой последовательности $\gamma_i, i = 1, 2, \dots$, такой что $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0, \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$. Однако при некоторых последовательностях, пусть и удовлетворяющих этим условиям, сходимость может оказаться недопустимо медленной для конкретного практического применения. По-видимому, потребуются значительные усилия, чтобы устранить указанные два пробела в попытке применить субградиентный спуск для решения наших задач.

7. Заключительные замечания: где находятся хорошие алгоритмы поиска наилучшей размытой разметки?

Как диффузия, так и субградиентный спуск обладают общей чертой, которая, возможно, и определяет их общие недостатки. В обоих этих алгоритмах производится эквивалентное преобразование функции качества (q, g) , хотя конечной целью является не удобное представление функции качества, а получение оптимальной весовой функции (α, β) , то есть размытой разметки. Однако такая переменная, как размытая разметка, в рассмотренных алгоритмах просто отсутствует. Будущие алгоритмы, свободные от недостатков рассмотренных, должны были бы на каждом своем шаге располагать какой-то весовой функцией (α, β) , возможно, и не оптимальной, и какой-то функцией качества (q, g) , возможно, и не обеспечивающей минимум мощности. При этом совсем не обязательно текущая весовая функция должна быть размытой разметкой, качество которой монотонно улучшается. Это может быть весовая функция, которая улучшается в каком-то другом смысле. Покажем на примере, как это может происходить.

Наша первоначальная цель состояла в решении задачи линейного программирования, в которой для заданной функции качества (q, g) требуется найти весовую функцию (α, β) , которая обеспечивает максимальное качество

$$\sum_{t't \in \mathfrak{Z}} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot g((t, k), (t', k')) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot q(t, k), \quad (47)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t, k) = \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')), t \in T, k \in K, t' \in N(t); \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) = 1, t \in T; \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta((t, k), (t', k')) \geq 0, tt' \in \mathfrak{Z}, k \in K, k' \in K. \end{array} \right. \quad (50)$$

Очевидно, что разметка (α, β) является оптимальной размытой разметкой, если она удовлетворяет условиям (48), (49) и (50) и дополнительным условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} q'(t, k) < \max_{l \in K} q'(t, l) \Rightarrow \alpha(t, k) = 0, t \in T, k \in K; \end{array} \right. \quad (51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g'((t, k), (t', k')) < \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g'((t, l), (t', l')) \Rightarrow \beta((t, k), (t', k')) = 0; \end{array} \right. \quad (52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (q', g') \sqsupseteq (q, g). \end{array} \right. \quad (53)$$

Условие (53) в приведенной системе обозначает в краткой форме эквивалентность функций (q', g') и (q, g) . Решение оптимизационной задачи (47)-(50) равносильно решению системы уравнений (48)-(53). Решение этой системы можно находить так, что вначале ослабляются, а затем постепенно усиливаются условия (48). Оптимизационная задача (47)-(50), таким образом, сводится к другой оптимизационной задаче, а именно, к поиску такой весовой функции (α, β) , функции качества (q, g) и такого минимального значения Δ^2 , при которых остается непротиворечивой система условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \left(\alpha(t, k) - \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \right)^2 \leq \Delta^2; \end{array} \right. \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q'(t, k) < \max_{l \in K} q'(t, l) \Rightarrow \alpha(t, k) = 0, t \in T, k \in K; \end{array} \right. \quad (55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g'((t, k), (t', k')) < \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g'((t, l), (t', l')) \Rightarrow \beta((t, k), (t', k')) = 0; \end{array} \right. \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) = 1, t \in T; \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta((t, k), (t', k')) \geq 0, tt' \in \mathfrak{Z}, k \in K, k' \in K; \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (q', g') \sqsupseteq (q, g). \end{array} \right. \quad (59)$$

Существенное преимущество такого или подобного представления первоначальной задачи состоит в том, что искомое минимальное значение величины Δ^2 равно нулю и требуется найти лишь все остальные величины, не противоречащие этому нулевому значению. Поэтому, если бы удалось построить алгоритм, последовательно уменьшающий величину Δ^2 , обеспечивая ее сходимость к нулю, то по крайней мере с условием останова этого алгоритма не было бы проблем: алгоритм следовало бы останавливать при достижении малого значения Δ^2 .

Система уравнений (54)-(59) обладает еще одним свойством, которое позволяет предполагать существование хорошего алгоритма, обеспечивающего сходимость Δ^2 к нулю. Пусть весовая функция (α, β) , функция качества (q, g) и число Δ^2 удовлетворяют системе. В таком случае имеет место по крайней мере одна из следующих четырех ситуаций:

1. весовая функция (α, β) является оптимальной размытой разметкой;

2. существуют объект t^* и метки k^* и k^{**} , веса $\alpha(t^*, k^*)$ и $\alpha(t^*, k^{**})$ которых можно без нарушения условий (54)-(59) изменить так, что левая часть неравенства (54), а следовательно, и величина Δ^2 уменьшатся;
3. существует дужка $((t, k), (t', k'))$, вес которой $\beta((t, k), (t', k'))$ можно изменить без нарушения условий (54)-(59) так, что левая часть неравенства (54), а следовательно, и величина Δ^2 уменьшатся;
4. функцию качества (q', g') можно без нарушения условий (54)-(59) изменить так, что мощность ее уменьшится.

Хотя точные решения задач (47)-(50) и (54)-(59) совпадают, их приближенные решения имеют различный характер. Приближенное решение задачи (47)-(50) обозначает отыскание размытой разметки, качество которой сколь-угодно мало отличается от качества оптимальной размытой разметки. Приближенное решение задачи (54)-(59) обозначает отыскание оптимальной весовой функции, которая однако не является размытой разметкой, так как нарушаются условия (48), однако «сколь-угодно мало» нарушает эти условия. Таким образом, практически пригодные алгоритмы, возможно, будут получены, если вместо точного решения первоначальной задачи находить приближенное решение другой задачи, сколь-угодно мало отличающейся от первоначальной.

В этом направлении можно пойти и дальше, дополнительно ослабляя и другие условия в системе (54)-(59). Например, заменить условия (55) и (56) на более слабое требование малого значения величины

$$\sum_{t \in T} \left(\max_{k \in K} q'(t, k) - \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot q'(t, k) \right) + \\ + \sum_{t' \in \mathfrak{Z}} \left(\max_{k \in K, k' \in K} g'((t, k), (t', k')) - \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot g'((t, k), (t', k')) \right)$$

и решать задачу минимизации функции

$$F(\alpha, \beta, q, g) = \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \left(\alpha(t, k) - \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \right)^2 + \\ + \sum_{t \in T} \left(\max_{k \in K} q'(t, k) - \sum_{k \in K} \alpha(t, k) \cdot q'(t, k) \right) + \\ + \sum_{t' \in \mathfrak{Z}} \left(\max_{k \in K, k' \in K} g'((t, k), (t', k')) - \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} \beta((t, k), (t', k')) \cdot g'((t, k), (t', k')) \right) \quad , \quad (60)$$

при условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} \alpha(t, k) = 1, \quad t \in T; \end{array} \right. \quad (61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta((t, k), (t', k')) \geq 0, \quad tt' \in \mathfrak{T}, \quad k \in K, \quad k' \in K; \end{array} \right. \quad (62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (q', g') \sqsupseteq (q, g). \end{array} \right. \quad (63)$$

Точное решение этой задачи совпадает с точным решением исходной задачи об оптимальной размытой разметке, однако представление ее в виде (60)-(63) имеет то преимущество, что здесь известно, что искомый минимум функции (60) равен нулю. Приближенное же решение задачи (60)-(63) может служить практически приемлемой заменой исходной задачи.

Результаты исследования задач (54)-(59) и (60)-(63) будут представлены в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schlesinger M.I., Flach. B., Analysis of optimal labelling problems and their applications to image segmentation and binocular stereovision. In Franz Leberl and Andrej Ferko, editors, Proceedings East-West-Vision 2002 (EWV'02), pages 55-60. International Workshop and Project Festival on Computer Vision, Computer Graphics, New Media, 2002
2. Kovtun. I.V., Partial optimal labeling search for a NP-hard subclass of (max,+) problems. // Conf. German Assoc. for Pattern Recognition (DAGM), 2003. - P. 402-409.
3. Kovtun. I.V., [Image segmentation based on sufficient conditions for optimality in NP-complete classes of structural labeling problems](http://irtc.org.ua/image/people/kovtun). PhD thesis, IRTC ITS, Ukraine, 2004. Available at <http://irtc.org.ua/image/people/kovtun>.
4. Ishikawa H., Geiger D., Segmentation by grouping junctions. // IEEE Conf. Comp. Vision and Pattern Recogn. – 1998. – P. 125–131.
5. Ishikawa H., Exact optimization for Markov random fields with convex priors. // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 25. – 2003. - № 10. - P. 1333-1336.
6. Schlesinger M.I., Flach. B., Some solvable subclasses of structural recognition problems. Czech Pattern Recognition Workshop. – Praha. – 2000. – P. 55-62.
7. Flach B., Schlesinger D., A. Shekhovtsov: A Higher Order MRF-Model for Stereo-Reconstruction, Pattern Recognition, LNCS vol. 3175, 2004, 440-446.
8. Boykov, Yu., Veksler, O., Zabih, R. Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts. In International Conference of Computer Vision, pages 377-384, 1999.
9. Kolmogorov, V., Zabih, R. Computing visual correspondence with occlusions via graph cuts. In International Conference of Computer Vision pages 508-515, 2001

10. Shlezinger M.I., Syntactic analysis of two-dimensional visual signals in the presence of noise // Cybernetics and Systems Analysis, Springer New York, Volume 12, Number 4 / July, 1976. – P. 612-628.
11. Schlesinger M.I., Koval V.K., Two dimensional programming in image analysis problems. Automatics and Telemechanics, Moscow, p.149-168, 1976. in russian
12. Waltz D., Understanding line drawings of scenes with shadows. In P. H. Winston editor, The Psychology of Computer Vision, p. 19–91. McGraw-Hill, 1975.
13. Huffman D. A., Impossible objects as nonsense sentences. In B. Meltzer and D. Michie, editors, Machine Intelligence 6, pages 295–323. Edinburgh Univ. Press, 26 2. Constraint Satisfaction: An Emerging Paradigm 1971
14. Kim, J., Kolmogorov V., Zabih R., Visual Correspondence Using Energy Minimization and Mutual Information. International Conference on Computer Vision, pages 1033-1040, October 2003.
15. Rossi F., Van Beek P., Walsh T. (eds.), The Handbook of Constraint Programming, Elsevier, 2006.
16. Bulatov A., Mal'tsev Constraints are Tractable. Technical Report PRG-02-05, Computing Laboratory, Oxford University, 2002.
17. Vintsyuk T.K. Analysis, pattern recognition and interpretation of speech signals. Kyiv, Naukova dumka, 1987. – 264.p. (In Russian).
18. Allen J.F., Natural Language Understanding. Benjamin-Cummings, 1994.
19. Dechter R., Constraint Processing. Morgan Kaufmann, 2003.
20. Tsang, E.P.K., Foundations of Constraint Satisfaction, Academic Press, London and San Diego, 1993
21. Boros E., Hammer P.L., Pseudo-Boolean optimization. Discrete Applied Mathematics 123(1-3): 155-225 (2002)
22. Schlesinger M.I., Giginjak V.V., Solving (max,+) problems of structural pattern recognition using equivalent transformations, Upravlyayushchie Sistemy i Mashiny (Control Systems and Machines), Kiev, Naukova Dumka, Number. 1 and 2, 2007, in Russian, English version is available at http://www.irtc.org.ua/image/publications/SchlGig_1_ru (Part 1), http://www.irtc.org.ua/image/publications/SchlGig_2_ru (Part 2).
23. Schlesinger D., Exact Solution of Permuted Submodular MinSum Problems. A.L.Yuille et al. (Eds.): EMMCVPR 2007, LNCS 4679, pp. 28–38, 2007.
24. Savchynskyy B., Franc V., Discriminative Learning of Max-Sum Classifiers, Journal of Machine Learning Research, 9(Jan) : 67-104, 2008, Microtome Publishing.

25. Schlesinger M.I., Hlavac V., Ten Lectures on Statistical and Structural Pattern Recognition. Computational Imaging and Vision // Kluwer Academic Publishers - Dordrecht / Boston / London., 2002, 520 p.
26. Wainwright M., Jaakkola T., Willsky A., Exact MAP estimates by (hyper)tree agreement. In S. T.S. Becker and K. Obermayer, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 15, pages 809–816. MIT Press, 2003.
27. Wainwright M., Jaakkola T., Willsky A., MAP estimation via agreement on trees: Message-passing and linear programming approaches. IEEE Trans. Information Theory, 51(11):3697–3717, 2005.
28. Kolmogorov V., Convergent tree-reweighted message passing for energy minimization. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2006. – 28. - № 10. - P. 1568-1583
29. Schlesinger M.I., Antoniuk K.V., “Diffusion algorithms and structural recognition optimization problems” Cybernetics and Systems Analysis, 2011, Vol.48, Number 2, p.3-12
30. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems, // Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London. – 1998. – 412 p.

Авторы:

M.I.Schlesinger – doctor of sciences, professor, International Research and Training Centre of Informational Technologies and Systems, Kiev.

М.И. Шлезингер – доктор физико-математических наук, Международный Научно-Учебный Центр Информационных Технологий и Систем, Киев.

K.V. Antoniuk – programming engineer, International Research and Training Centre of Informational Technologies and Systems, Kiev.

К.В. Антонюк – инженер-программист, Международный Научно-Учебный Центр Информационных Технологий и Систем, Киев.

E.V. Vodolazskiy – programming engineer, International Research and Training Centre of Informational Technologies and Systems, Kiev.

Е.В.Водолазский – инженер-программист, Международный Научно-Учебный Центр Информационных Технологий и Систем, Киев.