Published: Schlesinger M. I., Giginyak V. V. Solution to Structural Recognition (MAX,+)-problems by their Equivalent Transformations. Part 1. Control Systems and Computers, 2007(1), Kiev, pp.3-15

УДК 004.93'1 : 519.157

М.И. Шлезингер, В.В. Гигиняк

Решение (MAX,+)-задач структурного распознавания с помощью их эквивалентных преобразований. I*

Исследованы задачи структурного распознавания, которые сводятся к задачам дискретной оптимизации, известным как (max, +)-разметки. Описан механизм эквивалентных преобразований (max, +)-задач и их решение на основе таких преобразований. Класс разрешимых таким методом задач включает в себя известные ациклические и супермодулярные (max, +)-задачи.

Structural recognition problems are analyzed, which can be reduced to discrete optimization problems known as a (max, +)-labeling. An exhaustive mechanism for equivalent transformations of (max, +)-problems is described as well as their solution based on such transformations. Domain of the problems solvable in such a way includes the known acyclic and supermodular (max, +)-problems.

Досліджено задачі структурного розпізнавання, що зводяться до задач дискретної оптимізації, відомих як (max, +)-розмітки. Описано механізм еквівалентних перетворень (max, +)-задач та їх розв'язання на основі таких перетворень. Клас розв'язних таким методом задач охоплює відомі ациклічні та супермодулярні (max, +)-задачі.

Введение. Статья посвящена анализу специфических оптимизационных задач, к которым сводятся задачи структурного распознавания. Задачи этого типа состоят в оптимизации функций от большого количества дискретных аргументов. Специфика задач заключается в том, что оптимизируемая функция представлена в виде суммы большого количества слагаемых, каждое из которых зависит от малого количества аргументов, в частном случае, – только от двух. Эти задачи известны как (max,+)-задачи разметки.

Известно, что множество всех возможных задач такого формата образует *NP*-полный класс. Известен, однако, ряд полиномиально разрешимых их подклассов. Среди них наибольшей популярностью в распознавании пользуются два подкласса (max,+)-задач, известных под названием ациклических и супермодулярных.

В данной статье вводится понятие эквивалентных (max,+)-задач и предложен метод их решения на основе их эквивалентных преобразований. Авторами доказано, что класс задач, разрешимых с помощью их эквивалентных преобразований, включает в себя все ациклические и все супермодулярные (max,+)-задачи.

1. Определение основных понятий и предмета исследования

Известно, что структурное распознавание изображений сводится к решению специфических задач дискретной оптимизации [1–9]. Несмотря на огромное разнообразие прикладного содержания этих задач, они могут быть формализованы в определенном единообразном виде, который известен как задача (max,+)-разметки. Формулировка этой задачи основана на следующих понятиях.

Пусть T – множество объектов, например, множество пикселов поля зрения. Отдельные объекты этого множества будут обозначаться t или t', $t \in T$, $t' \in T$. На множестве T задано множество $\Im$ неупорядоченных пар объектов, которое будем называть соседством. Выражение $tt' \in \Im$ обозначает, что объекты t и t' являются соседними. Обозначение $N(t)$ будет использовано для множества объектов, соседних с объектом t. Везде далее предполагается, что граф, задаваемый отношением $\Im$, связный.

Пусть K – конечное множество, элементы которого называются *метками*. Для каждой метки k и каждого объекта t задано число $q_t(k)$. Для каждой пары $tt' \in \Im$ соседних объек-

*Работа выполнена в рамках проекта EU INTAS PRINCESS 04-77-7347

тов и для каждой пары меток k и k' задано число $g_{tt'}(k,k')$. Эти числа назовем *качествами* или *весами*.

Разметкой называется функция $\bar{k}: T \to K$, которая каждому объекту t ставит в соответствие метку $k(t)$. Множество всех возможных функций такого формата принято обозначать K^T. Качество $G(\bar{k})$ разметки $\bar{k}: T \to K$ определяется как сумма введенных ранее качеств, а именно,

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)) . \quad (1)$$

Задача (max,+)-разметки состоит в отыскании разметки $\bar{k}^* \in K^T$ с максимальным качеством:

$$\bar{k}^* = \arg\max_{\bar{k} \in K^T} G(\bar{k}) . \quad (2)$$

Без потери общности можно считать, что все числа $q_t(k)$ равны нулю. В дальнейшем в зависимости от того, как это будет удобней, будем определять качество разметки или как (1), или как

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')) . \quad (3)$$

Множество всех возможных задач вида (1), (2) образует *NP*-полный класс. Известны, однако, следующие три подкласса этих задач, которые полиномиально разрешимы. Назовем их ациклическими, супермодулярными и задачами, эквивалентными тривиальным.

Ациклические задачи это те, в которых соседство $\Im$ не содержит циклов. Известно (например, [10]), что (max,+)-задачи с ациклическим соседством полиномиально разрешимы, причем при любых весах $q_t(k)$ и $g_{tt'}(k,k')$. Решение этих задач основано на методе динамического программирования.

На исследования в теории и практике структурного распознавания последнего десятилетия сильно повлиял тот факт, что полиномиально разрешимыми являются и (max,+)-задачи, обладающие свойством супермодулярности [2, 6, 7, 9, 11–14,]. Это свойство определяется следующими ограничениями на числа $g_{tt'}(k,k')$ и алфавит K меток:

- алфавит K меток есть полностью упорядоченное множество,
- для любых четырех меток k, l и k', l', таких, что $k < l$ и $k' < l'$, и любой пары $tt' \in \Im$ соседних объектов выполняется неравенство

$$g_{tt'}(k,k') + g_{tt'}(l,l') \geq g_{tt'}(k,l') + g_{tt'}(l,k') . \quad (4)$$

Супермодулярные (max,+)-задачи полиномиально разрешимы, причем для любых весов $q_t(k)$ и любого соседства $\Im$. Решение этих задач основано на сведении их к поиску максимального сечения на графе или, что то же самое, – к поиску максимального потока в графе.

Класс задач, эквивалентных тривиальным, менее известен, хотя и сформулирован значительно раньше. Первые публикации на эту тему относятся к 70 годам прошлого века [1, 15]. Позже подобные идеи, но под другими названиями, были исследованы в работах [16–18]. Достаточно полный обзор этого направления содержится в [19]. Формулировка этого класса задач основана на следующих понятиях.

Пусть (max,+)-задача характеризуется числами $g_{tt'}(k,k')$. В каждой паре $tt' \in \Im$ соседних объектов выберем пары меток с максимальным для этих двух объектов качеством. Это значит, что паре меток k и k' присваивается бинарная величина $\bar{g}_{tt'}(k,k')$, обозначающая, отобрана пара меток k и k' в паре $tt' \in \Im$ соседних объектов или нет:

$$\bar{g}_{tt'}(k,k') = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } g_{tt'}(k,k') = \max\limits_{k^* \in K, k^{**} \in K} g_{tt'}(k^*, k^{**}), \\ 0, & \text{если } g_{tt'}(k,k') < \max\limits_{k^* \in K, k^{**} \in K} g_{tt'}(k^*, k^{**}). \end{cases} \quad (5)$$

Задача называется тривиальной, если существует разметка $\bar{k}^*$, составленная только из отобранных пар меток. Точнее, задача тривиальна по определению, если существует разметка $\bar{k}^*$ такая, что

$$\mathop{\&}_{tt' \in \Im} \bar{g}_{tt'}(k^*(t), k^*(t')) = 1 . \quad (6)$$

Эквивалентность двух (max,+)-задач определяется следующим естественным образом. Пусть заданы две (max,+)-задачи, первая из которых характеризуется весами $g^1{}_{tt'}(k,k')$, а вторая – весами $g^2{}_{tt'}(k,k')$. Эти задачи называются эквивалентными, если качество любой разметки, вычисленное в первой задаче, равно качеству этой разметки во второй задаче, т.е. когда равенство

$$\sum_{tt'\in\Im} g^1{}_{tt'}(k(t),k(t')) = \sum_{tt'\in\Im} g^2{}_{tt'}(k(t),k(t')) \qquad (7)$$

выполняется для любой разметки $\bar{k} \in K^T$.

Класс (max,+)-задач, эквивалентных тривиальным, является полиномиально разрешимым [1, 2, 20]. Решение задач из этого класса состоит в поиске тривиальной задачи в том или ином классе эквивалентности и сводится к решению задачи линейного программирования. Однако в силу огромного количества переменных и ограничений для ее решения неприменимы методы общего назначения, как, например, симплекс-метод. Известные подходы, начиная от самых ранних [15] и кончая недавними [16–18], направлены на то, чтобы привести исходную задачу к тривиальному виду с помощью специальных алгоритмов, более простых, чем симплекс-метод. Для всех этих алгоритмов характерно, что они не гарантируют отыскания тривиального эквивалента исходной задаче, даже если такой существует. Этот недостаток известных алгоритмов будет сформулирован более определенно. Сейчас отметим лишь, что известные алгоритмы сводят исходную задачу к задаче, в которой выполняются лишь необходимые, но не достаточные условия тривиальности. Таким образом, остается открытым вопрос об эквивалентном преобразовании задачи в тривиальную, естественно, при условии, что такой тривиальный эквивалент существует. В данной работе осуществлена попытка восполнить этот пробел. Вместе с тем в статье будет представлено полное описание метода эквивалентных преобразований (max,+)-задач, включая тот важный факт, что как ациклические, так и супермодулярные задачи эквивалентны тривиальным, где тривиальность понимается в приведенном (6) точном смысле. Эти сведения в разрозненном виде, а иногда и без доказательств содержатся в работах одного из авторов, а также в обзоре [19]. Предлагаемая статья является в определенном смысле итоговой в этом направлении, и эти результаты включены в нее с целью придания ей автономности.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 исследуется соотношение между известными классами (max,+)-задач и показано, что как ациклические, так и супермодулярные задачи эквивалентны некоторым тривиальным задачам. В разд. 3 выполнен формальный анализ классов эквивалентных (max,+)-задач и показано, что преобразования с помощью потенциалов, предложенные в [1], полностью исчерпывают класс эквивалентности. Показано также, что преобразование (max,+)-задачи в тривиальную сводится к решению специфических задач выпуклой негладкой минимизации. В разд. 4 приведен алгоритм этой минимизации, основанный на обобщенном градиентном спуске [21]. В разд. 5 обсуждаются описанные в данной части результаты и указан основной элемент новизны, отличающий их от результатов, известных к настоящему времени.

Во второй части работы, которая будет опубликована в одном из ближайших номеров, показано, как идеи эквивалентного преобразования задач эффективно реализуются в том случае, когда отношение соседства имеет специальный вид, характерный для множества пикселов двумерных изображений. Завершает работу описание различных экспериментов разметки изображений на основе решения (max,+)-задач методом их эквивалентных преобразований.

2. Ациклические и супермодулярные (max,+)-задачи и задачи, эквивалентные тривиальным

Сформулируем и докажем две теоремы, утверждающие, что как ациклические, так и супермодулярные задачи эквивалентны тривиальным. Для доказательства первой из них понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть для фиксированного множества T, $|T| \geq 2$, объектов, фиксированного отношения соседства $\Im$ (max,+)-задача эквивалентна тривиальной при любых весах $g_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, $k \in K$, $k' \in K$. Пусть t' – объект, не содержащийся в T, а t'' – объект, содержащийся в T. В таком случае задача на множестве $T' = T \cup \{t'\}$ объектов, отношении соседства $\Im' = \Im \cup \{t't''\}$ эквивалентна тривиальной при любых весах $g'_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im'$, $k \in K$, $k' \in K$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный объект $t^* \in T$, соседний с t'', $t^*t'' \in \Im$. Для каждой метки $k'' \in K$ выполним преобразование весов следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{t''t'}(k'',k') &= g_{t''t'}(k'',k') + \varphi(k''), \quad k' \in K, \\ \bar{g}_{t''t^*}(k'',k^*) &= g_{t''t^*}(k'',k^*) - \varphi(k''), \quad k^* \in K, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi(k'')$ – произвольные числа. Это преобразование эквивалентно, так как качество любой разметки в результате этого преобразования остается неизменным. В качество разметки $\bar{k} \in K^T$ входят либо слагаемые $g_{t''t'}(k(t''),k(t'))$ и $g_{t''t^*}(k(t''),k(t^*))$ до преобразования, либо слагаемые $\bar{g}_{t''t'}(k(t''),k(t'))$ и $\bar{g}_{t''t^*}(k(t''),k(t^*))$ после преобразования. Хотя эти слагаемые и изменились, в силу (8) не изменилась их сумма, т.е.

$$\begin{aligned} &\bar{g}_{t''t'}(k(t''),k(t')) + \bar{g}_{t''t^*}(k(t''),k(t^*)) = \\ &g_{t''t'}(k(t''),k(t')) + g_{t''t^*}(k(t''),k(t^*)). \end{aligned}$$

Все остальные слагаемые, составляющие качество этой разметки, остались неизменными.

Преобразование (8) выполним так, чтобы все числа $\bar{g}_{t''t'}(k'',k')$, $k'' \in K, k' \in K$, стали неположительными, а для каждой метки k'' хотя бы одно число из совокупности $\bar{g}_{t''t'}(k'',k'), k' \in K$, стало равным нулю.

По условию леммы задача на множестве T, соседстве $\Im$ и с весами $\bar{g}_{tt'}(k,k')$ эквивалентна тривиальной. Это значит, что существует такой набор весов $\tilde{g}_{tt'}(k,k')$, эквивалентный исходному набору весов, и существует разметка $\bar{k}^0 : T \to K$, для которой $\tilde{g}_{tt'}(k^0(t), \ k^0(t')) = \max\limits_{k \in K, k' \in K} \tilde{g}_{tt'}(k,k')$ выполняется для всех пар tt' объектов, соседних в T. Расширим эту разметку на множество $T' = T \cup \{t'\}$ так, что в качестве метки $k^0(t')$ выберем ту, для которой выполняется $\bar{g}_{t''t'}(k^0(t''),k^0(t')) = 0$. Для построенной таким образом разметки $\bar{k}^0 : T' \to K$ равенство $\tilde{g}_{tt'}(k^0(t),k^0(t')) = \max\limits_{k \in K, k' \in K} \tilde{g}_{tt'}(k,k')$ выполняется уже для всех пар объектов, соседних в T'. Это значит, что задача на множестве объектов T' с соседством $\Im'$ с весами $\tilde{g}_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, и весами $\bar{g}_{t''t'}(k'',k')$ тривиальна. Она же эквивалентна исходной. ■

Теорема 1. Для любой (max,+)-задачи на множестве T с ациклическим соседством $\Im$ существует эквивалентная ей тривиальная задача.

Доказательство. Построим последовательность $\{T_i, \Im_i\}$, $i = 1, \ldots, n-1$, графов так, чтобы множество T_1 состояло из двух соседствующих объектов, граф $\{T_{n-1}, \Im_{n-1}\}$ совпадал с графом $\{T, \Im\}$, а любые два графа $\{T_i, \Im_i\}$ и $\{T_{i+1}, \Im_{i+1}\}$ в этой последовательности удовлетворяли условиям леммы 1 на $\{T, \Im\}$ и $\{T', \Im'\}$. Очевидно, что задача $\{T_1, \Im_1\}$ тривиальна, так как T_1 состоит из двух объектов. Для любого $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-2$ задачи $\{T_i, \Im_i\}$ и $\{T_{i+1}, \Im_{i+1}\}$ удовлетворяют условию леммы 1, следовательно, любая задача из последовательности $\{T_i, \Im_i\}_{i=1}^{n-1}$ эквивалентна некоторой тривиальной задаче. Поскольку исходная задача совпадает с задачей $\{T_{n-1}, \Im_{n-1}\}$, она тоже эквивалентна тривиальной. ■

Доказательство приведенных леммы и теоремы фактически указывает путь к построению алгоритма, непосредственно преобразующего любую ациклическую (max,+)-задачу в тривиальную. Этот алгоритм не будет отличаться от общеизвестного решения, основанного на идеях динамического программирования (например, [10]). Однако эти идеи не обобщаются на случай произвольного отношения соседства. Докажем, что идеи эквивалентного преобразования (max,+)-задач допускают такое обобщение. Центральным понятием в технологии эквивалентного преобразования (max,+)-задач к тривиальному виду является энергия задачи, определяемая как величина

$$E = \sum_{tt' \in \Im} \max_{k \in K, k' \in K} g_{tt'}(k,k'). \qquad (9)$$

Из сравнения выражений (9) и (3) видно, что для любой разметки $\bar{k} \in K^T$ выполняется неравенство

$$G(\bar{k}) \le E. \qquad (10)$$

Достаточно очевидной является следующая лемма, которую приведем без доказательства.

Лемма 2. (max,+)-задача тривиальна тогда и только тогда, когда существует разметка $\bar{k}^*$, для которой выполняется равенство $G(\bar{k}^*) = E$.

Менее очевидна, но тем не менее легко доказуема следующая лемма.

Лемма 3. Пусть Z – класс эквивалентности, содержащий по крайней мере одну тривиальную задачу $z^* \in Z$. В таком случае:

- задача z^* обеспечивает минимум энергии в классе Z;
- любая задача $z^{**} \in Z$, обеспечивающая минимум энергии в классе Z, тривиальна.

Доказательство. В силу леммы 2 существует разметка $\bar{k}$, для которой выполняется равенство $G(\bar{k}, z^*) = E(z^*)$, где $G(\bar{k}, z^*)$ – качество разметки $\bar{k}$ в задаче z^*, а $E(z^*)$ – энергия этой задачи. Пусть z' – любая задача из класса Z. Поскольку задачи z^* и z' эквивалентны, $G(\bar{k}, z^*) = G(\bar{k}, z')$. С другой стороны, для разметки $\bar{k}$ в соответствии с (10) выполняется неравенство $G(\bar{k}, z') \le E(z')$. Запишем сказанное в виде цепочки

$$E(z^*) = G(\bar{k}, z^*) = G(\bar{k}, z') \le E(z'),$$

что доказывает первое утверждение в лемме.

Пусть z^{**} – любая задача, минимизирующая энергию в классе Z. Это значит, что $E(z^{**}) = E(z^*)$. По условию леммы z^* тривиальна и поэтому, в силу леммы 2 $G(\bar{k}, z^*) = = E(z^*)$. Задачи z^* и z^{**} эквивалентны, и поэтому $G(\bar{k}, z^*) = G(\bar{k}, z^{**})$. Из приведенных трех равенств следует $E(z^{**}) = G(\bar{k}, z^{**})$. В силу леммы 2 это значит, что задача z^{**} тривиальна, что доказывает второе утверждение леммы. ■

Лемма 4. Пусть для некоторой (max,+)-задачи z существует разметка $\bar{k}$, для которой выполняется $\sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')) > -\infty$. В таком случае класс Z задач, эквивалентных z, содержит задачу, минимизирующую энергию в этом классе.

Доказательство. Энергию $E = \sum_{tt' \in \Im} \max_{k \in K, k' \in K} g_{tt'}(k,k')$ задачи можно представить в виде $E = \min \sum_{tt' \in \Im} h(t,t')$, где $h(t,t')$ – вспомогательные величины, удовлетворяющие неравенствам $h(t,t') \ge g_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, $k \in K$, $k' \in K$.

Эквивалентность двух задач определяется системой линейных равенств

$$\sum_{tt' \in \Im} \bar{g}_{tt'}(k(t), k(t')) = \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')), \ \ \bar{k} \in K^T.$$

Поиск (max,+)-задачи, эквивалентной z и обеспечивающей минимум энергии в Z, есть следующая задача линейного программирования:

$$\min \sum_{tt' \in \Im} h(t,t')$$

$$h(t,t') \ge \bar{g}_{tt'}(k,k'), \ \ tt' \in \Im, \ \ k \in K, \ \ k' \in K,$$

$$\sum_{tt' \in \Im} \bar{g}_{tt'}(k(t), k(t')) = \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')), \ \ \bar{k} \in K^T.$$

Переменными в этой задаче являются числа $\bar{g}_{tt'}(k,k')$ и $h(t,t')$, на которые наложены ограничения. Очевидно, что эти ограничения непротиворечивы, так как выполняются по крайней мере при $\bar{g}_{tt'}(k,k') = g_{tt'}(k,k')$. Целевая функция на множестве допустимых решений ограничена снизу качеством некоторой разметки $\bar{k}$, существование которой гарантируется условием леммы. В силу известных теорем линейной оптимизации [22] в таких задачах минимум целевой функции (в данном случае – энергии задачи) достигается на множестве допустимых решений (в данном случае – на множестве Z задач, эквивалентных z). ■

Лемма 5. Пусть z – супермодулярная (max,+)-задача на множестве T с соседством $\Im$ и весами $g_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, $k \in K$, $k' \in K$. Пусть $\varphi_{tt'}(k), tt' \in \Im, k \in K, k' \in K$, – произвольные действительные числа. Пусть $\bar{z}$ – это (max,+)-задача на том же множестве T, с тем же соседством $\Im$, но весами $\bar{g}_{tt'}(k,k') = g_{tt'}(k,k') + +\varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k')$. В таком случае задача $\bar{z}$ – тоже супермодулярная.

Доказательство. Для задачи z в силу ее супермодулярности неравенство

$$g_{tt'}(l,l') + g_{tt'}(m,m') \geq g_{tt'}(l,m') + g_{tt'}(m,l')$$

выполняется для любых $tt' \in \Im$ и любых меток $l < m$ и $l' < m'$. Отсюда непосредственно следует, что

$$g_{tt'}(l,l') + \varphi_{tt'}(l) + \varphi_{t't}(l') + g_{tt'}(m,m') + \varphi_{tt'}(m) + \varphi_{t't}(m') \geq$$
$$\geq g_{tt'}(l,m') + \varphi_{tt'}(l) + \varphi_{t't}(m') + g_{tt'}(m,l') + \varphi_{tt'}(m) + \varphi_{t't}(l').$$

Левая часть этого неравенства есть не что иное, как $\bar{g}_{tt'}(l,l') + \bar{g}_{tt'}(m,m')$, а правая часть – $\bar{g}_{tt'}(l,m') + \bar{g}_{tt'}(m,l')$. Это значит, что $\bar{g}_{tt'}(l,l') + +\bar{g}_{tt'}(m,m') \geq \bar{g}_{tt'}(l,m') + \bar{g}_{tt'}(m,l')$, что доказывает супермодулярность задачи $\bar{z}$. ■

Теорема 2. Пусть z – супермодулярная (max,+)-задача на множестве T с соседством $\Im$ и весами $g_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, $k \in K$, $k' \in K$, для которой существует по крайней мере одна разметка $\bar{k}$, такая, что $\sum_{tt' \in \Gamma} g_{tt'}(k(t),k(t')) > -\infty$. В таком случае для этой задачи существует эквивалентная ей тривиальная задача, а именно задача z^*, минимизирующая энергию в классе супермодулярных задач, эквивалентных z.

Доказательство. Докажем, что любая супермодулярная задача либо тривиальна, либо существует эквивалентная ей и тоже супермодулярная задача с меньшей энергией. Тем самым докажем и теорему. Действительно, для супермодулярной задачи z^*, минимизирующей энергию (а существование такой задачи почти непосредственно вытекает из леммы 4), невозможна задача с меньшей энергией. Следовательно, z^* может быть только тривиальной.

Покажем тривиальность супермодулярной задачи или возможность уменьшения ее энергии с помощью следующего алгоритма:

1. Исходными для алгоритма являются числа $g_{tt'}\left(k,k'\right)$, $tt' \in \Im$, $k \in K$ $k' \in K$.

2. Для каждой пары $tt' \in \Im$ объектов сформируем множество

$$K_{tt'} = \left\{ \left(k,k'\right) \middle| g_{tt'}\left(k,k'\right) = \max_{l,l'} g_{tt'}\left(l,l'\right) \right\}.$$

3. Для каждой пары $tt' \in \Im$ объектов определим пару $k_{tt'}\left(t\right)$ и $k_{tt'}\left(t'\right)$ меток таких, что для любой пары $\left(k,k'\right) \in K_{tt'}$ выполняются неравенства $k_{tt'}\left(t\right) \geq k$, $k_{tt'}\left(t\right) \geq k'$. Такая пара меток гарантированно существует и образована из метки $k_{tt'}\left(t\right)$ – самой высокой в множестве $\left\{ k \middle| \exists k' : \left(k,k'\right) \in K_{tt'} \right\}$, и метки $k_{tt'}\left(t'\right)$ – самой высокой в множестве $\left\{ k' \middle| \exists k : \left(k,k'\right) \in K_{tt'} \right\}$. Действительно, существует метка l', такая, что $l' \leq k_{tt'}\left(t'\right)$ и $\left(k_{tt'}\left(t\right),l'\right) \in K_{tt'}$, и существует метка l, такая, что $l \leq k_{tt'}\left(t\right)$ и $\left(l,k_{tt'}\left(t'\right)\right) \in K_{tt'}$. Это значит, что

$$g_{tt'}\left(k_{tt'}\left(t\right),l'\right) = g_{tt'}\left(l,k_{tt'}\left(t'\right)\right) = \max_{s,s'} g_{tt'}\left(s,s'\right),$$

и, вследствие супермодулярности задачи,

$$g_{tt'}\left(k_{tt'}\left(t\right),k_{tt'}\left(t'\right)\right) = \max_{s,s'} g_{tt'}\left(s,s'\right).$$

Это также значит, что определенная нами пара $\left(k_{tt'}\left(t\right),k_{tt'}\left(t'\right)\right)$ входит в $K_{tt'}$.

4. Найдем тройку объектов t, t', t'', таких, что $tt' \in \Im$ и $tt'' \in \Im$ и $k_{tt'}\left(t\right) \neq k_{tt''}\left(t\right)$.

Если такой тройки объектов нет, то прекратить работу алгоритма, так как текущая задача оказывается тривиальной.

5. Примем для определенности, что $k_{tt'}(t) > k_{tt''}(t)$, и выполним преобразование

$$\begin{aligned}&\bar{g}_{tt'}(k_{tt'}(t),k') := g_{tt'}(k_{tt'}(t),k') - \varphi, \quad k' \in K,\\&\bar{g}_{tt''}(k_{tt'}(t),k'') := g_{tt''}(k_{tt'}(t),k'') + \varphi, \quad k'' \in K.\end{aligned} \qquad (13)$$

В силу леммы 5 это преобразование не нарушает супермодулярности задачи.

При положительных значениях φ преобразование (13) уменьшает величины $g_{tt'}\left(k_{tt'}(t),k'\right)$, $k' \in K$, и, следовательно, из множества $K_{tt'}$ исключаются некоторые пары меток. Преобразование (13) увеличивает числа $g_{tt''}\left(k_{tt'}(t),k''\right)$, $k'' \in K$. Однако ни одна из пар $\left(k_{tt'}(t),k''\right)$, $k'' \in K$, не входила в множество $K_{tt''}$ и поэтому при достаточно малом, хотя и положительном, значении φ множество $K_{tt''}$ не изменится.

6. Исключить из множества $K_{tt'}$ те пары $\left(k_{tt'}(t),k'\right)$, $k' \in K$, которые в нем находились.

7. Если множество $K_{tt'}$ оказалось пустым, то прекратить работу алгоритма, так как получена супермодулярная задача, эквивалентная исходной, но с меньшей энергией.

8. Перейти к п. 3. ■

3. Конструктивное определение классов эквивалентных задач

В предыдущем разделе уже использовались определенные преобразования задачи, эквивалентность которых очевидна, и на этом основании доказано, что два широко известных класса (max,+)-задач эквивалентны тривиальным. Следующей целью является построение механизмов для эквивалентного преобразования любой (max,+)-задачи и приведения ее к тривиальной, если, конечно, это вообще возможно. Для этого необходимо конструктивно описать исчерпывающим образом все множество эквивалентных преобразований (max,+)-задач.

Введем вспомогательное понятие нулевой (max,+)-задачи, как такой, для которой качество любой разметки $\bar{k} \in K^T$ равно нулю. Следующая очевидная лемма, которая будет приведена без доказательства, показывает, каким образом полное описание класса нулевых (max,+)-задач является исчерпывающим описанием всех классов эквивалентных задач.

Лемма 6. Две (max,+)-задачи с весами $g^1_{tt'}(k,k')$, $q^1_t(k)$ и $g^2_{tt'}(k,k')$, $q^2_t(k)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда задача с весами $g_{tt'}(k,k') = g^1_{tt'}(k,k') - g^2_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k) = q^1_t(k) - q^2_t(k)$ нулевая.

Теорема 3. Пусть числа $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ определяют (max,+)-задачу. Эта задача нулевая тогда и только тогда, когда существуют числа $\varphi_{tt'}(k), tt' \in \Im, k \in K$, и числа $h(t)$, $t \in T$, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} g_{tt'}(k,k') = \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k'), \\ \qquad tt' \in \Im, k \in K, \ \ k' \in K, \\ q_t(k) = -\sum\limits_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) + h(t), \\ \qquad t \in T, k \in K, \\ \sum\limits_{tt' \in \Im} h(t) = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть для чисел $g_{tt'}\left(k,k'\right)$ существуют числа $\varphi_{tt'}\left(k\right)$ и $h\left(t\right)$, удовлетворяющие равенствам (14). Качество любой разметки $\bar{k} \in K^T$ равно

$$\begin{aligned}&\sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t),k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)) = \\&= \sum_{tt' \in \Im} \left(\varphi_{tt'}(k(t)) + \varphi_{t't}(k(t'))\right) + \\&+ \sum_{t \in T}\left(h(t) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k(t))\right).\end{aligned}$$

В данном выражении любое число $\varphi_{tt'}(k)$ присутствует либо два раза, либо ни разу. При этом, если число $\varphi_{tt'}(k(t))$ входит в сумму

$\sum_{tt'\in\Im}\left(\varphi_{tt'}(k(t))+\varphi_{t't}(k(t'))\right)$ со знаком плюс, то оно входит в сумму $\sum_{t\in T}\left(h(t)-\sum_{t'\in N(t)}\varphi_{tt'}(k(t))\right)$ со знаком минус. Таким образом, качество любой разметки равно $\sum_{t\in T} h(t)$ и в силу (14) равно нулю.

Несколько более трудоемко доказательство, что для любой нулевой задачи существуют числа $\varphi_{tt'}(k)$ и $h(t)$, удовлетворяющие равенствам (14). Это доказательство выполняется в четыре этапа.

• Докажем, что если числа $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ определяют нулевую задачу, то для любой пары объектов $tt'\in\Im$ и любой четверки k_1,k_1',k_2,k_2' меток выполняется равенство

$$g_{tt'}(k_1,k_1')+g_{tt'}(k_2,k_2')=g_{tt'}(k_1,k_2')+g_{tt'}(k_2,k_1'). \quad (15)$$

Функции $g_{tt'}$, удовлетворяющие этому равенству, называются модулярными.

Рассмотрим и зафиксируем для дальнейшего рассмотрения два соседних объекта t и t', две метки k_1 и k_2 как возможные метки объекта t, две метки k_1' и k_2' как возможные метки объекта t'. Выберем и зафиксируем для дальнейшего рассмотрения произвольную разметку всех остальных объектов и оставим для рассмотрения четыре разметки $\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3,\bar{k}_4$, такие, что

$$k_1(t)=k_1,\ k_1(t')=k_1',\ k_2(t)=k_2,\ k_2(t')=k_2',$$
$$k_3(t)=k_1,\ k_3(t')=k_2',\ k_4(t)=k_2,\ k_4(t')=k_1'.$$

Качества этих четырех разметок в силу условия теоремы равны нулю. Представим качество первой разметки в следующем виде:

$$G(\bar{k}_1)=g_{tt'}(k_1,k_1')+f_t(k_1)+ +f_{t'}(k_1')+A=0, \quad (16)$$

где

$$f_t(k_1)=\sum_{\substack{t''\in N(t)\\ t''\neq t'}} g_{tt'}(k_1,k_1(t''))+q_t(k_1),$$

$$f_{t'}(k_1')=\sum_{\substack{t''\in N(t')\\ t''\neq t}} g_{tt'}(k_1',k_1(t''))+q_{t'}(k_1'),$$

$$A=\sum_{t^*t^{**}\in\Im\setminus\{tt'\}} g_{t^*t^{**}}(k_1(t^*),k_1(t^{**}))+\sum_{t^*\in T\setminus\{t,t'\}} q_{t^*}(k_1(t^*)).$$

Заметим, что слагаемое A будет также входить и в качества остальных трех разметок, слагаемое $f_t(k_1)$ – в качество третьей разметки, а слагаемое $f_{t'}(k_1')$ – в качество четвертой разметки. Аналогично выражению (16) запишем качества остальных трех разметок:

$$G(\bar{k}_2)=g_{tt'}(k_2,k_2')+f_t(k_2)+f_{t'}(k_2')+A=0, \quad (17)$$

$$G(\bar{k}_3)=g_{tt'}(k_1,k_2')+f_t(k_1)+f_{t'}(k_2')+A=0, \quad (18)$$

$$G(\bar{k}_4)=g_{tt'}(k_2,k_1')+f_t(k_2)+f_{t'}(k_1')+A=0. \quad (19)$$

Суммируя (16), (17) и вычитая (18), (19), получим

$$g_{tt'}(k_1,k_1')+g_{tt'}(k_2,k_2')-g_{tt'}(k_1,k_2')-g_{tt'}(k_2,k_1')=0. \quad (20)$$

Равенство (15) доказано.

• Докажем, что для любой модулярной функции $g_{tt'}: K\times K\to R$ существуют такие числа $\varphi_{tt'}(k)$, что

$$g_{tt'}(k,k')=\varphi_{tt'}(k)+\varphi_{t't}(k').$$

Эти числа следует находить так: выбрать произвольную метку k_0, а затем определить числа $\varphi_{tt'}(k)$ и $\varphi_{t't}(k)$ следующим образом:

$$\varphi_{tt'}(k_0)=0,\ \varphi_{t't}(k)=g_{tt'}(k_0,k),\ k\in K,$$
$$\varphi_{tt'}(k)=g_{tt'}(k,k_0)-\varphi_{t't}(k_0),\ k\in K.$$

Очевидно, что в результате такого выбора чисел $\varphi_{tt'}(k)$ и $\varphi_{t't}(k)$ равенства

$$g_{tt'}(k,k_0)=\varphi_{tt'}(k)+\varphi_{t't}(k_0), \quad (21)$$

$$g_{tt'}(k_0,k)=\varphi_{tt'}(k_0)+\varphi_{t't}(k) \quad (22)$$

будут выполняться для всех $k\in K$.

Покажем, что в результате такого выбора чисел $\varphi_{tt'}(k)$ и $\varphi_{t't}(k)$ равенство $g_{tt'}(k,k')= =\varphi_{tt'}(k)+\varphi_{t't}(k')$ будет выполняться для всех пар k,k'. В силу модулярности функции $g_{tt'}$ справедливо равенство

$$g_{tt'}(k,k') = g_{tt'}(k,k_0) - g_{tt'}(k_0,k_0) + g_{tt'}(k_0,k').$$

Выразим слагаемые в правой части этого равенства в соответствии с (21) и (22) и получим

$$g_{tt'}(k,k') = \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k_0) - \varphi_{tt'}(k_0) -$$
$$-\varphi_{t't}(k_0) + \varphi_{tt'}(k_0) + \varphi_{t't}(k') = \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k').$$

• Докажем, что числа $\varphi_{tt'}(k)$, удовлетворяющие условиям, записанным в первой строке системы (14), таковы, что величины $q_t(k) + \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k)$ не зависят от k.

Рассмотрим две разметки $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, отличающиеся только в объекте t так, что $k_1(t) = k_1$ и $k_2(t) = k_2$, а значения этих разметок во всех прочих объектах $t' \neq t$ обозначим $k_0(t')$. Качества этих разметок равны

$$G(\bar{k}_1) = \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k_1) + q_t(k_1) + A,$$

$$G(\bar{k}_2) = \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k_2) + q_t(k_2) + A,$$

где

$$A = \sum_{\substack{t^*t^{**} \in \Im, \\ t^* \neq t, t^{**} \neq t}} g_{t^*t^{**}}(k_0(t^*), k_0(t^{**})) +$$
$$+ \sum_{t^* \in T \setminus \{t\}} q_{t^*}(k_0(t^*)) + \sum_{t^* \in N(t)} \varphi_{t^*t}(k_0(t^*)).$$

Поскольку $G(\bar{k}_1) = G(\bar{k}_2) = 0$, то $\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k_1) + q_2(k_1) = \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k_2) + q_t(k_2)$, а это значит, что число $\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) + q_t(k)$ не зависит от k. Поскольку оно зависит только от t, обозначим $\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) + q_t(k)$ как $h(t)$.

• Докажем, что сумма $\sum_{t \in T} h(t)$ равна нулю.

Действительно,

$$\sum_{t \in T} h(t) = \sum_{t \in T} \left(\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k(t)) + q_t(k(t)) \right) =$$
$$+ \sum_{tt' \notin \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)) = 0. \quad \blacksquare$$

Для случая, когда отношение соседства $\Im$ образует связный граф, условия, указанные в теореме 3, можно усилить, заменив условие $\sum_{t \in T} h(t) = 0$ более сильным условием $h(t) = 0$ для каждого $t \in T$.

Теорема 4. Пусть числа $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ определяют (max,+)-задачу и отношение соседства $\Im$ задает связный граф. Эта задача является нулевой тогда и только тогда, когда существуют числа $\varphi_{tt'}(k), tt' \in \Im, k \in K$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} g_{tt'}(k,k') = \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k'), \\ \qquad tt' \in \Im, k \in K, \ k' \in K, \\ q_t(k) = -\sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k), \\ \qquad t \in T, \quad k \in K. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Очевидно, что если для чисел $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ существуют числа $\varphi_{tt'}(k)$, удовлетворяющие условиям (23), то для этих же чисел существуют и числа $\varphi_{tt'}(k)$ и $h(t)$, удовлетворяющие условиям (14). В частности, это могут быть числа $h(t) = 0$.

Покажем теперь, что если для чисел $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ существуют числа $\varphi_{tt'}(k)$ и $h(t)$, удовлетворяющие условиям (14), то для этих же чисел $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ существуют числа $\varphi_{tt'}(k)$, удовлетворяющие условиям (23).

Пусть G – граф, задаваемый отношением соседства $\Im$. Так как G связный, то можно построить его остовное дерево G'. Выберем произвольную пару соседних в G' объектов (t^*, t'), таких, что t^* является листом дерева. Преобразуем величины $\varphi_{t^*t'}(k)$, $\varphi_{t't^*}(k)$, $h(t')$ и $h(t^*)$ следующим образом:

$$\varphi_{t^*t'}(k) := \varphi_{t^*t'}(k) + h(t^*), \quad k \in K,$$
$$\varphi_{t't^*}(k) := \varphi_{t't^*}(k) - h(t^*), \quad k \in K,$$
$$h(t') := h(t') + h(t^*), \quad h(t^*) := 0.$$

Приведенные выражения следует понимать как операторы, а не как равенства. Это значит, что обозначения $\varphi_{t^*t'}(k)$, $\varphi_{t't^*}(k)$, $h(t')$ и $h(t^*)$ в правой части выражений – значения соответствующих величин до преобразования, а эти же обозначения в левой части – значения этих же величин после преобразования. В результате такого однократного преобразования чисел $\varphi_{t^*t'}(k)$, $\varphi_{t't^*}(k)$, $h(t')$ и $h(t^*)$ останутся в силе условия (14), однако величина $h(t^*)$ станет равной нулю.

Исключим из G' вершину t и будем повторять процедуру до тех пор, пока в G' не останется единственная вершина t'. На этой стадии будет по-прежнему выполняться условие $\sum_{t\in T} h(t)=0$, однако для всех $t \neq t'$ будут уже выполняться и условия $h(t)=0$. Поэтому для t' также будет выполняться условие $h(t')=0$. ■

Из теорем 3 и 4 следует, что если для двух задач с весами $g^1_{tt'}(k,k')$, $q^1_t(k)$ и $g^2_{tt'}(k,k')$, $q^2_t(k)$ существуют такие числа $\varphi_{tt'}(k)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
g^1_{tt'}(k,k') = g^2_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k'), \\
tt' \in \Im, \quad k \in K, \quad k' \in K, \\
q^1_t(k) = q^2_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k), \\
t \in T, \quad k \in K,
\end{gathered} \tag{24}$$

то эти две задачи эквивалентны. И, что более существенно, если две задачи с весами $g^1_{tt'}(k,k'), q^1_t(k)$ и $g^2_{tt'}(k,k'), q^2_t(k)$ эквивалентны, то существуют такие числа $\varphi_{tt'}(k)$, которые удовлетворяют условиям (24). Преобразование (24) охватывает, таким образом, все множество эквивалентных преобразований задач.

Запишем энергию задачи с учетом этого преобразования и получим

$$\begin{aligned}
E = \sum_{tt' \in \Im} \max_{k\in K, k' \in K} \left[g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k') \right] + \\
+ \sum_{t \in T} \max_{k \in K} \left[q_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, что энергия является выпуклой функцией потенциалов φ. Как выражения $g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k')$, так и выражения $q_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k)$ являются линейными, а значит, и выпуклыми функциями от потенциалов $\varphi_{tt'}(k)$. Следовательно, выражения $\max_{k\in K, k' \in K} \left[g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k') \right]$ и $\max_{k \in K} \left[q_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}(k) \right]$ также являются выпуклыми функциями потенциалов. В соответствии с (25) энергия E является суммой выпуклых функций от потенциалов и, следовательно, выпуклой функцией. Таким образом, поиск минимума энергии задачи сведен к оптимизации выпуклой, хотя и не гладкой, функции, причем без ограничений на значения переменных $\varphi_{tt'}(k)$.

4. Алгоритм минимизации энергии

Для решения задачи минимизации энергии в этой работе был использован метод обобщенного градиентного спуска, предложенный Н.З. Шором [21]. Основная идея метода применительно к задаче минимизации энергии состоит в следующем. Обозначим Φ массив потенциалов $\varphi_{tt'}(k)$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$. Определим последовательность γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, чисел так, что

$$\lim_{i\to\infty} \gamma_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty. \tag{26}$$

Выберем произвольный начальный массив Φ_0 и определим последовательность Φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, так, что

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i - \gamma_{i+1} \nabla E(\Phi_i), \tag{27}$$

где $\nabla E(\Phi_i)$ – произвольный обобщенный градиент выпуклой функции E в точке Φ_i. Сущ-

Сущность обобщенного градиентного спуска состоит в том, что при произвольном начальном массиве Φ_0 последовательность $E(\Phi_0)$, $E(\Phi_1)$, … имеет предел, равный $\min_{\Phi} E(\Phi)$.

Для задачи, рассматриваемой в данной статье, Φ является вектором в пространстве $\Re^{2|\Im\times K|}$, компонентами которого являются потенциалы $\varphi_{tt'}(k)$. Известно, что обобщенный градиент выпуклой функции не обязательно определен однозначно. Один из обобщенных градиентов энергии E в точке Φ_i может быть получен по следующей схеме:

1. Для каждого объекта $t \in T$ выбрать метку $k^*(t)$, для которой

$$q_t(k^*(t)) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi^i_{tt'}(k^*(t)) =$$

$$= \max_{k \in K}\left[q_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi^i_{tt'}(k)\right].$$

2. Для каждой пары соседних объектов $tt' \in \Im$ выбрать две метки $k^*_{tt'}(t)$ и $k^*_{tt'}(t')$, для которых

$$g_{tt'}(k^*_{tt'}(t), k^*_{tt'}(t')) + \varphi^i_{tt'}(k^*_{tt'}(t)) +$$

$$+\varphi^i_{t't}(k^*_{tt'}(t')) =$$

$$= \max_{k \in K,\, k' \in K}\left[g_{tt'}(k,k') + \varphi^i_{tt'}(k) + \varphi^i_{t't}(k')\right].$$

3. Определить компоненты $\nabla\varphi_{tt'}(k)$ обобщенного градиента как

$$\nabla\varphi_{tt'}(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k^*_{tt'}(t) = k,\ k^*(t) \neq k, \\ -1, & \text{если } k^*_{tt'}(t) \neq k,\ k^*(t) = k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. Обсуждение результатов

Соотнесем результаты, полученные в данной части работы, с результатами, известными к настоящему времени.

Задача (max,+)-разметки заключается в том, чтобы при заданных множествах $T, \Im \subset T \times T, K$ и заданных функциях $g_{tt'} : K \times K \to R$, $tt' \in \Im$, и $q_t : K \to R$, $t \in T$, найти разметку $\bar{k}^* : T \to K$, которая максимизирует число

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k(t), k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)).$$

Задача $(\vee, \&)$-разметки заключается в том, чтобы при заданных множествах $T, \Im \subset T \times T, K$ и заданных функциях $g_{tt'} : K \times K \to \{0,1\}$, $tt' \in \Im$, и $q_t : K \to \{0,1\}$, $t \in T$, определить, существует ли разметка $\bar{k}^* : T \to K$, для которой

$$G(\bar{k}^*) = \mathop{\&}_{tt' \in \Im} g_{tt'}(k^*(t), k^*(t')) \,\&\, \mathop{\&}_{t \in T} q_t(k^*(t)) = 1.$$

Если такая разметка существует, то говорят, что $(\vee, \&)$-задача имеет положительное решение.

Задача $(\vee, \&)$-разметки называется согласованной, если для любой тройки $tt' \in \Im$, $k \in K$ выполняется равенство

$$q_t(k) = \bigvee_{k'} g_{tt'}(k, k').$$

Задача $(\vee, \&)$-разметки называется пустой, если $q_t(k) = 0$ для всех $t \in T$, $k \in K$. Определим, что $(\vee, \&)$-задача с числами $g_{tt'}(k,k')$ и $q_t(k)$ содержит в себе $(\vee, \&)$-задачу с числами $g'_{tt'}(k,k')$ и $q'_t(k)$, если $g'_{tt'}(k,k') \leq g_{tt'}(k,k')$ и $q'_t(k) \leq q_t(k)$ для всех $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$. Очевидно, что если $(\vee, \&)$-задача имеет положительное решение, то она содержит непустую согласованную часть. Обратное утверждение, конечно, ложно.

Идея, объединяющая изложенный в данной статье подход, и подходы, известные к настоящему времени, состоит в следующем. Оптимизационной (max,+)-задаче с числами $g_{tt'}(k,k') \in R$, $q_t(k) \in R$ ставится в соответствие $(\vee, \&)$-задача с числами $\bar{g}_{tt'}(k,k') \in \{0,1\}$, $\bar{q}_t(k) \in \{0,1\}$ по правилам

$$\bar{g}_{tt'}(k,k') = 1, \text{ если } g_{tt'}(k,k') = \max_{l,l'} g_{tt'}(l,l'),$$

$$\bar{g}_{tt'}(k,k') = 0, \text{ если } g_{tt'}(k,k') < \max_{l,l'} g_{tt'}(l,l'),$$

$$\bar{q}_t(k) = 1, \text{ если } q_t(k) = \max_{l} q_t(l),$$

$$\bar{q}_t(k) = 0, \text{ если } q_t(k) < \max_{l} q_t(l).$$

Затем выполняется эквивалентное преобразование исходной (max,+)-задачи с целью сведения ее к виду, при котором соответствующая ей ($\vee$, &)-задача имеет положительное решение. Это то, что в данной статье (и предыдущих работах одного из авторов) названо эквивалентным преобразованием исходной задачи в тривиальную.

Естественно, не любая исходная задача может быть преобразована в тривиальную, так как обратное обозначало бы полиномиальную разрешимость *NP*-полного класса задач. Поэтому как предлагаемый подход, так и известные подходы, конечно, не гарантируют преобразование любой (max,+)-задачи в тривиальную.

Существенное отличие предлагаемого подхода от известных состоит в том, что известные алгоритмы преобразуют исходную задачу в эквивалентную ей, такую, что соответствующая ($\vee$, &)-задача содержит непустую согласованную часть. Предлагаемый же подход состоит в преобразовании исходной задачи в эквивалентную ей и обеспечивающую минимум энергии. Такой подход более сильный, чем известные подходы. Именно, если (max,+)-задача такова, что соответствующая ей ($\vee$, &)-задача содержит непустую согласованную часть, то эта (max,+)-задача не обязательно минимизирует энергию в своем классе эквивалентности. Если же (max,+)-задача обеспечивает минимум энергии, то соответствующая ей ($\vee$, &)-задача обязательно содержит непустую согласованную часть. Во второй части работы при описании экспериментов с разработанными алгоритмами будет показана на конкретном примере правильность двух последних утверждений.

Существенное отличие предлагаемого подхода от известных выражено леммой 3, которая утверждает, что если для данной решаемой (max,+)-задачи существует тривиальный эквивалент, то любая задача, минимизирующая энергию в данном классе эквивалентности, тривиальна. Поэтому минимизация энергии задачи гарантирует сведение ее к тривиальной, если для нее такой тривиальный эквивалент существует, в то время как известные алгоритмы такой гарантии не дают.

Помимо этого основного результата уместно указать еще и побочный результат, касающийся решения ($\vee$, &)-задач и вытекающий из идеи минимизации энергии (max,+)-задач.

В силу *NP*-полноты множества ($\vee$, &)-задач невозможно указать легко проверяемые необходимые и достаточные условия их положительной разрешимости. Поэтому используется широко известный метод, основанный на необходимом, но недостаточном условии. А именно, для того, чтобы ($\vee$, &)-задача имела положительное решение, необходимо, чтобы она содержала непустую согласованную часть. Идеи минимизации энергии позволяют усилить это необходимое условие следующим образом.

Пусть $g_{tt'}(k,k')$, $tt' \in \Im$, $k \in K$, $k' \in K$, – числа, равные нулю или единице, определяющие ($\vee$, &)-задачу, которая состоит в вычислении значения

$$G(\vee,\&) = \bigvee_{\bar{k} \in K^T} \mathop{\&}_{tt' \in \Im} g_{tt'}\left(k(t),k(t')\right). \quad (28)$$

Поставим ей в соответствие (max,+)-задачу, состоящую в вычислении значения

$$G(\max,+) = \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g_{tt'}\left(k(t),k(t')\right). \quad (29)$$

Очевидно, что если ($\vee$, &)-задача (28) имеет положительное решение, то (max,+)-задача (29) минимизирует энергию в своем классе эквивалентности. Очевидно также, что это необходимое условие положительной разрешимости не слабее, чем ранее сформулированное. На самом деле оно сильнее, и во второй части работы будет приведен конкретный пример непустой согласованной ($\vee$, &)-задачи, не имеющей положительного решения, отсутствие которого легко проверяется эквивалентным преобразованием соответствующей (max,+)-задачи.

Хотя предложенный алгоритм минимизации энергии и потребовал довольно обширного анализа формальных свойств (max,+)-задач, конечная его формулировка привлекает своей простотой, возможностью практически безграничного распараллеливания и, может быть, другими свойствами. В то же время, как и все алгоритмы, претендующие на общее решение обширных классов задач, при его применении к тем или иным подклассам (max,+)-задач он может оказаться менее предпочтительным, чем специальные алгоритмы, предназначенные для решения задач именно этого подкласса. В этом смысле приведенный алгоритм есть лишь иллюстрация принципа минимизации энергии (max,+)-задач общего вида, который служит отправной точкой при разработке алгоритмов решения задач с той или иной спецификой. Во второй части этой работы будет показано применение описанного принципа в том случае, когда множество объектов есть не абстрактное множество с произвольной структурой соседства, а множество пикселов изображения с вполне определенной и характерной именно для изображений структурой.

1. *Шлезингер М.И.* Синтаксический анализ двумерных зрительных сигналов в условиях помех // Кибернетика – 1976. – № 4. – С. 113–130.
2. *Schlesinger M.I.*, *Flach B.* Some solvable subclasses of structural recognition problems // Czech Pattern Recognition Workshop. – Praha. – 2000. – P. 55–62.
3. *Flach B.* Strukturelle Bilderkennung // Technical report, Fakultät Informatik, Technische Universität Dresden, 2002. Habilitation thesis.
4. *Schlesinger D*. Strukturelle Ansätze für die Stereorekonstruktion // Technische Universität at Dresden, Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, PhD thesis, July, 2005.
5. *Kovtun I.* Partial optimal labeling search for a NP-hard subclass of (max,+) problems // Conf. German Assoc. for Pattern Recognition (DAGM), 2003. – P. 402–409.
6. Kolmogorov V., *Zabih R.* What energy functions can be minimized via graph cuts? // 7th Eur. Conf. on Comp. Vision (ECCV), Springer-Verlag, 2002. – P. 65–81.
7. *Ishikawa H.*, *Geiger D.* Segmentation by grouping junctions // IEEE Conf. Comp. Vision and Pattern Recogn. – 1998. – P. 125–131.
8. *Ishikawa H.* Exact optimization for Markov random fields with convex priors. // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2003. – № 10, **25**. – P. 1333–1336.
9. *Boykov Y.*, *Veksler O.*, *Zabih R.* Fast approximate energy minimization via graph cuts // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2001. – **23**, № 11. – P. 1222–1239.
10. *Schlesinger M.I.*, *Hlavac V.* Ten Lectures on Statistical and Structural Pattern Recognition. Computational Imaging and Vision. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 520 p.
11. *Boros E.*, *Hammer P.I.* Pseudo-Boolean optimization // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – **123**, № 1–3. – P. 155–225.
12. *Burkard R.E.*, *Klinz B.*, *Rudolf R.*. Perspectives of Monge properties in optimization // Discrete Applied Mathematics. – 1996. – **70**, № 2. – P. 95–161.
13. *Lovasz L.* Submodular functions and convexity // Mathematical Programming – The State of the Art / Ed. by A. Bachem, M. Grotschel, B. Korte. – New York: Springer-Verlag, 1983. – P. 235–257.
14. *Hammer P.L.* Some network flow problems solved with pseudo-Boolean programming // Operations Research. – 1965. – **13**. – P. 388–399.
15. *Коваль В.К.*, *Шлезингер М.И.* Двумерное программирование в задачах анализа изображений // Автоматика и телемеханика. – 1976 . – № 8. – С. 149–168.
16. *Wainwright M.*, *Jaakkola T.*, *Willsky A.* MAP estimation via agreement on (hyper) trees: message passing and linear programming approaches // Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, 2002.
17. *Kolmogorov V.* Convergent tree-reweighted message passing for energy minimization. // Microsoft Research. Tech. Rep. MSR-TR-1005-38, 2005.
18. *Kolmogorov V.* Convergent tree-reweighted message passing for energy minimization. // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2006. – **28,** № 10. – P. 1568–1583.
19. *Werner T.* A Linear Programming Approach to Max-sum Problem: // A review. ftp://cmp.felk.cvut.cz/pub/cmp/articles/werner/Werner-TR-2005-25.pdf.
20. *Шлезингер М.И.* Математические средства обработки изображений. – К.:, Наук. думка, 1989 – 200 с.
21. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979 – 200 с.
22. *Зуховицкий С.С.*, *Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

Поступила 25.12.2006

Тел. для справок (044) 526-6208 (Киев)